الفصل الأول

من تاريخ الفلك: القياس والتقريب المتتالي

الجزء الأول: القيـــاس

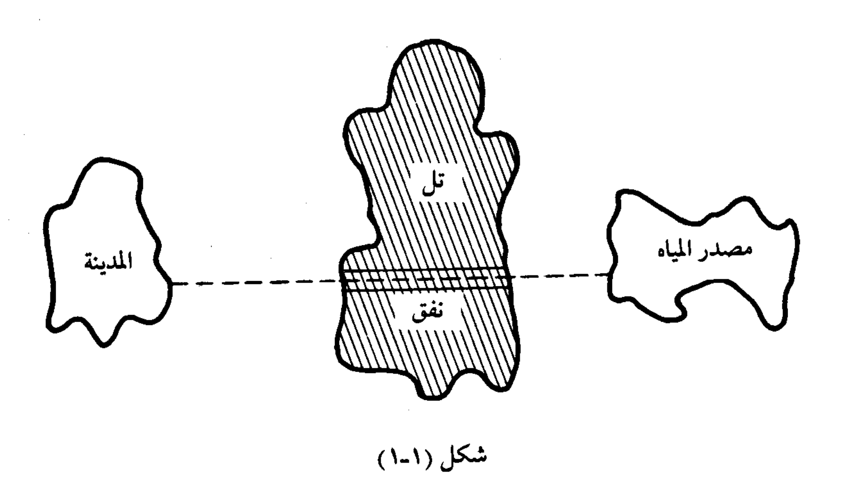
(١ - ١ - ١) النفـــق

لقـــد قاس الفلكيـون بعـد الشمس عن الأرض، وحتى أبعـاد النجـوم الثـابتـة. كيف قاسوها؟ طبعا ليس بالسير في الفضاء الخارجي واستعمال مسطرة قياس. بعد الأماكن التي لا يمكن الـوصـول اليها يحسب من بعد الأماكن التي يمكن الوصول إليها. لقياس النجوم نعود إلى الأرض، المسح الفلكي له أساس أرضي.

سنبـدأ بمشكلة أرضيـة. وجدت مدينة يونانية قديمة أن مصادر مياهها غير كافية بسبب تزايد سكانها، ولذا كان من الضروري تحويل الماء من مصدر في الجبال المجاورة. وحيث إنه كان هنـاك تل كبـير، فقـد وجب شق نفق فيـه. بدأ العـمال من طرفي التـل والتقوا في الوسط حسب المخطط. انظر الشكل (١ - ١).

كيف حدد المخططـون الاتجـاه الصحيح ليتأكدوا من أن العمال سيلتقون؟ كيف يمكنك التخطيط لمثل هذا العمل؟ تذكر أن اليونانيين لا يعرفون إشارات الراديو ولا التلسكوب. ومع ذلك استطاعوا اكتشاف طريقة ونجحوا في جعل أنفاقهم من الجانبين تلتقي داخل التل. فكر في هذا.

طبعـا، لو لم يكن مصـدر المـاء أعلى من المدينة لما انساب الماء عبر القناة بفعل الجاذبية. لكن لكي نركز على الموضوع الرئيسي سوف نتجاهل الاختلاف في المنسوب.

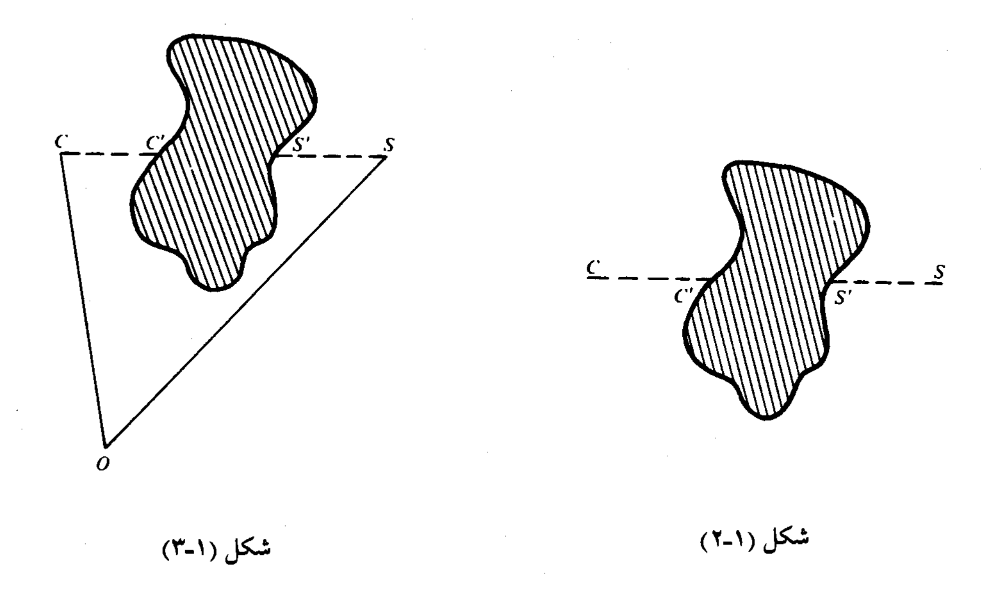


شكل (١-١)

تصبح المشكلة كما يلي: كيف يمكن تعيين خط النظر بين النقاط C و S عندما يعترضهما التل؟ أنظر الشكل (١ - ٢). هذه مسألة هندسة تطبيقية. كيف يمكن رسم القطع المستقيمة CC' , SS' على المستقيم CS بدون وصل C إلى S؟ لا يُسمح بتخطي المساحة المظللة.

الشيء الذي لا يمكن توصيله مباشرة يمكن توصيله بصورة غير مباشرة. لتكن O نقطة يمكن منها رؤية كل من C و S. إذا وصلنا O إلى C و S نحصل على الشكل (١ - ٣).

بالتأكيـد هذا الـرسم يوحي بتطبيق حسـاب المثلثـات. كيف نعـين مثلثا؟ بقياس زواياه وأضلاعه. ما هي الزوايا التي يمكن قياسها في الشكل (١ - ٣)؟ الزاوية عند O يمكن قياسها لأنه يمكن رؤية كل من C و S من O. ولكن ماذا عن الزوايا عند C و S؟ لا نستطيع قياس $\angle OCC'$ لأن التـل يعـترض بين C و S ولـذا فالاتجاه CC' غير معروف. لنفس السبب لا يمكن حسـاب $\angle OSS'$ ، أو الطـول CS. لذا يمكن قيـاس كل من OC ، OS والـزاويـة O - ضلعين والزاوية المحصورة - وهذا كافي لتحديد المثلث OCS .



شكل (١-٣)

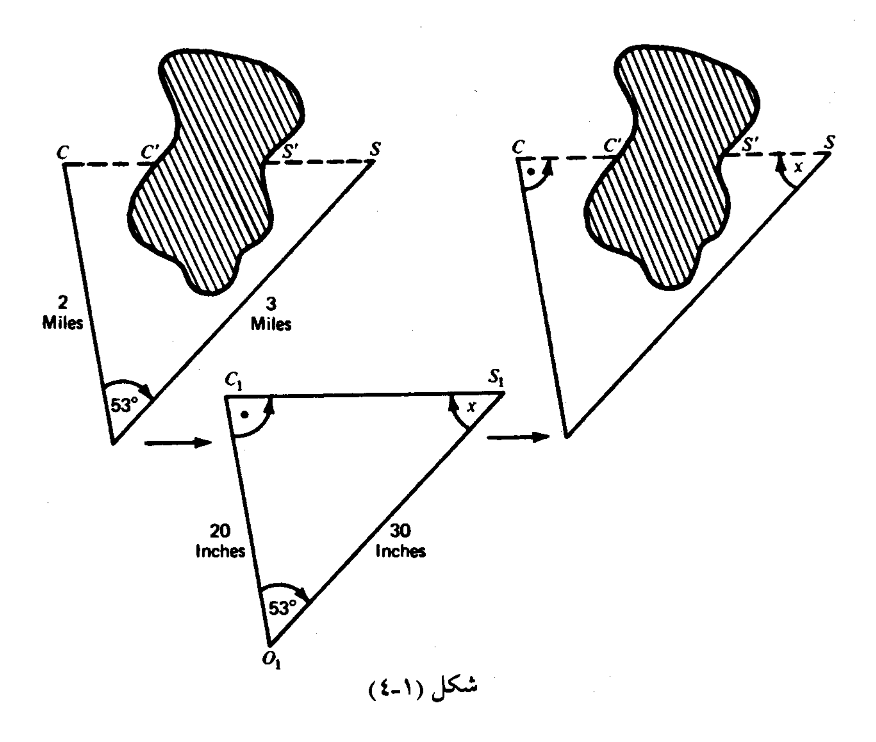
شكل (١-٢)

لنفـرض أن OC يسـاوي ٢ ميـل و OS يساوي ٣ أميال و $\angle COS = 53°$. يمكن الآن عمـل شكـل بمقيـاس رسم حيث O_1C_1 يسـاوي ٢٠ بوصـة ، O_1S_1 يسـاوي ٣٠ بوصـة والـزاويـة $\angle C_1O_1S_1 = 53°$. وحيث إن المثلثـات المتشابهة متساوية الزوايا، نستنتج أن $\angle OCC'$ (أي OCS .) = $\angle O_1C_1S_1$, و $\angle OSS'$ (أي OSC) = $\angle O_1S_1C_1$. . انظر الشكل (١ ـ ٤) وهكذا حُلت المسألة.

القـارىء الفطن قد لاحـظ أنـه يمكن حساب طول النفق وكذلك الجزء المخصص لكل مجمـوعـة من العـمال. اتجـاهـا CC' و SS' محددان ويمكن حساب طوليهما كذلك؛ من طول في المثلث المساعد يمكن استنتاج طول CS عن طريق التناسب: طول النفق هو الفرق بين CS ومجموع CC' و SS' .

(١ ـ ١ ـ ٢) القيـاس: التثليث (Triangulation)

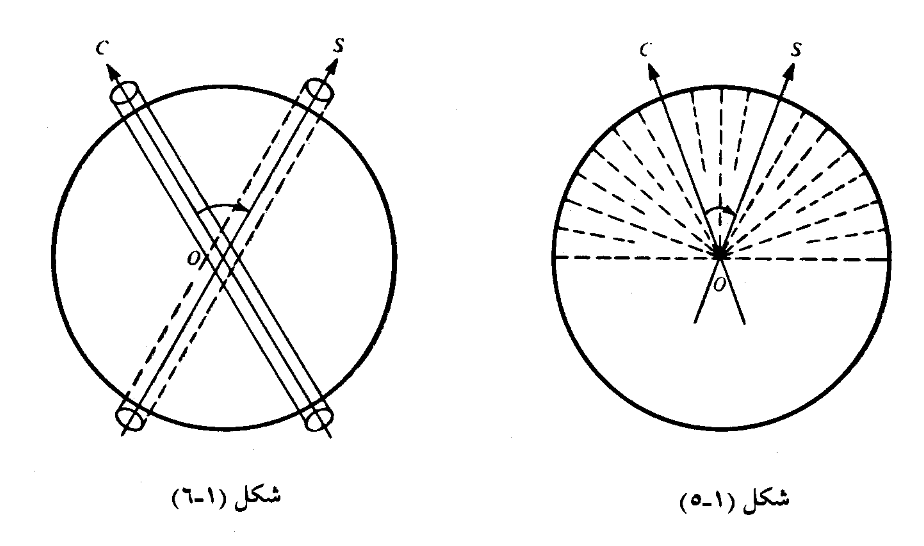
الآن كلمة عن القياس وأهميته العملية. كيف نقيس زاوية ما؟ إننا نقيسها تقريبا بنفس الطـريقـة التي قاسهـا بها اليونانيون قبل ألفي سنة. جهاز الثيودوليت الحديث أدق ولكن مبدأ



شكل (١-٤)

القيـاس واحـد ويعتمـد في الأساس على المنقلة . ما هي المنقلة؟ إنها قوس أو أي محيط دائري مقسم إلى أجزاء متساوية ، انظر شكل (١ ـ ٥) . عندما نغير خط النظر من OC إلى OS فإنه يدور عبر عدد من تقسيمات القوس الدائري . حيث إن كمية الدوران متناسبة مع هذا العدد إذن يمكن اعتبـاره قيـاس للزاويـة $\angle COS$. لقد اتفق منذ عهد البابليين على اعتبار الدورة الكاملة ٣٦٠ درجة ، ولذا فإننا نقسم المحيط إلى ٣٦٠ جزءا متساويا (درجة) . عندما نحتاج إلى دقة أكبر والمنقلة كبيرة بحيث تسمح بتقسيمات إضافية فإننا نقسم كل درجة إلى ٦٠ جزءاً متساوياً قياس كل منها واحد على ستين من الدرجة (دقيقة) وكذلك نقسم كل دقيقة إلى ٦٠ جزءاً (ثانية) .

يجب معـرفـة خطـوط النظر OS , OC بدقة لكي نتمكن من قياس $\angle COS$ بدقة ، ويتم ذلك بتعيين S , C بمساعدة شعرة على نهاية أنبوبة اسطوانية مثبتة عند O . ويمكن الحصول



شكل (١-٦)

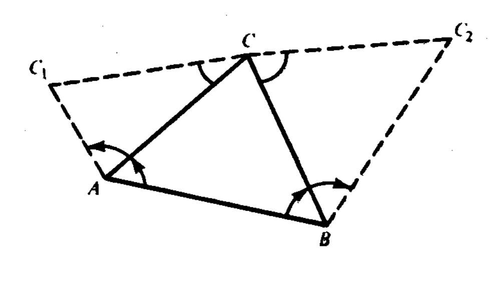
شكل (١-٥)

على نتـائـج أدق باستخدام أنبوبة التلسكوب. انظر الشكل (١ - ٦). ولكن لا يمكن تفادي الخطأ تماما مهما كانت دقة القياسات. لذلك فإن مساحي اليوم مثل المساحين قبل ألفي سنة، يعملون عدة قياسات للزاوية ومن ثم يأخذون متوسطها. قياس الزاوية لا يزال عملية أساسية.

القـاريء الـذي جرب النجـارة كهواية يعرف مدى صعوبة عمل إطار وضبط زواياه. قد يظن البعض أن قيـاس الأطـوال أسهـل من الـزوايـا، ولكن هذا غير صحيـح. في أعمال المسـاحـة، قيـاس الزوايا عملية دقيقة نسبيا. إن قياس قطعة طولها ميل أو ميلان عملية شاقة ومكلفة. يجب أن تكون القطعة مستوية تماما. صعوبة أخرى تتمثل في أن أدوات القياس من أسيـاخ وسـلاسـل يتغـير طولهـا مع تغـير الحرارة، وصعوبة أخرى تتعلق بضرورة كون الخط مستقيم. ان الـرجـال الـذين بنـوا المسارع في ستانفورد والذي طوله ميلان سيؤكدون لك أن قياس الزوايا أسهل بكثير من عمل خط مستقيم.

عندما نحدد خطا للقاعدة AB فإن رؤية شيء بعيد C مثل قمة برج أو قمة جبل يمكننا من قياس الزاويتين BAC, ABC ولذا نستطيع حساب الطولين BC, AC بحساب المثلثات.

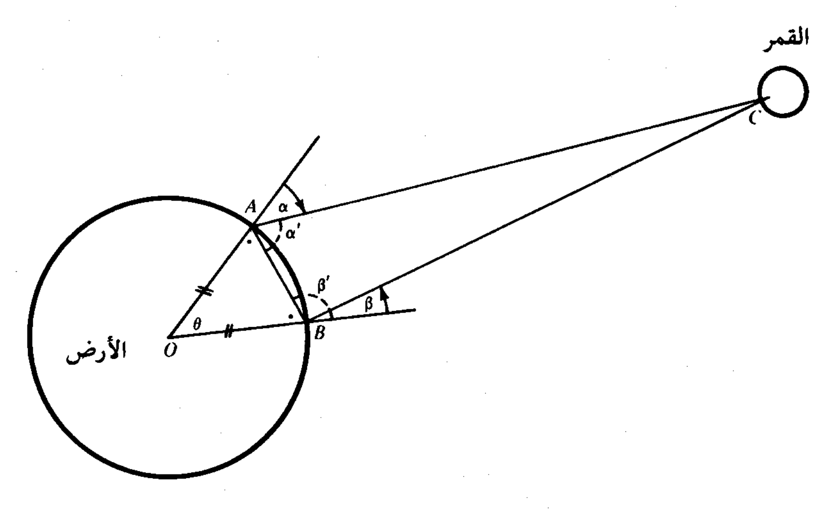
هذان الطـولان بدورهما يستخـدمـان كخطي قاعدة ومنهما نرى أشياء أخرى مثل C_1 ، C_2، وهـذا يؤدي إلى استعـمال AC_1 ، CC_1 ، CC_2 ، BC_2 كخطـوط قاعدة جديدة وهلم جرا. انظر شكل (١ ـ ٧). بهذا الأسلوب والمسمى التثليث يمكن مسح بلد كامل أو حتى قارة.



شكل (١-٧)

(١ ـ ١ ـ ٣) كم يبعد القمـر؟

الآن نترك الأرض ونتجـه للسمـاء. كيف يمكن قيـاس بعد القمر عن الأرض؟ حيث إن هذه المسافة لا يمكن قياسها مباشرة، يجب قياسها بصورة غير مباشرة. نحتاج إلى خط قاعدة معلوم. هذه مشكلة تثليث. هل يمكن ربـط المشكلة بالمثلث ABC في شكـل (١ ـ ٧)؟ لاحظ شكل (١ ـ ٨). الجواب نعم، إذا استطعنا حساب المسافة AB والزوايا α' ، β' .
اذا حسبنـا المسـافـة AB على سطـح الأرض (طـول القـوس) وكـانت الزاوية θ معلومة فمن الممكن حساب OA (أو بالعكس إذا علمنا نصف القطر OA، نستطيع تعيين الزاوية θ).
ومن المثلث المتسـاوي السـاقـين OAB ، نحسب المسـافـة المستقيمـة AB . ولكن كيف نحسب α' ؟ يمكن حساب الزاوية $\angle OAB$ من المثلث OAB ، وهكذا نعرف α' عندما نعرف α . ولكن ما هي الزاوية α ؟ إنها الزاوية التي يعملها خط النظر إلى القمر مع الخـط العمـودي عنـد A . وكيف نعـين الخـط العمـودي؟ يتم ذلـك بتعليق الفـادن. بنفس الأسلوب نعـين β' من β . لاحـظ أنـه لا غنى عن خط القـاعدة، ولذا فإنه قبل أن يتمكن اليونانيون من قياس بعد القمر وجب عليهم معرفة شكل وحجم الأرض.

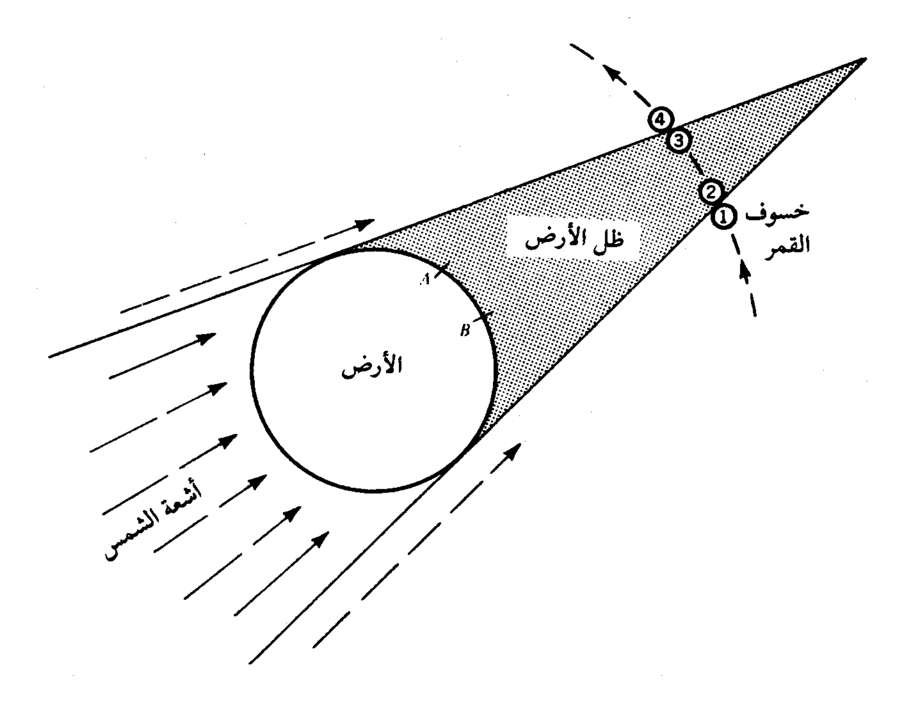


شكل (١-٨)

هناك عقبة، القمر يتحرك بالنسبة للأرض، إذا قسنا β عند B بعد قياسنا للزاوية $\varnothing$ عند A، فإن β ليست الزاوية بين الخط العمودي والقمر عندما يكون عند C، إنها الزاوية من القمر في مكان لاحق C'. وبدلا من الحصول على المثلث ABC، نحصل على شكل رباعي A, B, C, C' وتفشل الطريقة. للتثليث يجب أن تنطبق C على C' كما يجب قياس α و β في نفس الوقت.

ولكن كيف يعرف الذي يقيس عند B متى يقيس الشخص الآخر عند A؟ يمكن إرسال إشارة بواسطة مصباح لو كانت المسافة بينهما بضعة أميال، ولكن للحصول على قياس دقيق يجب أن يكون خط القاعدة أطول بكثير. تذكر أن كلا من BC, AC يساوي عشرات الآلاف من الأميال ولذا يجب أن يكون طول خط القاعدة مئات الأميال على الأقل. تذكر أيضاً أنه لم يكن لدى اليونانيين جهاز لإرسال إشارات ولا حتى ساعات دقيقة. إن المشكلة تبدو مستحيلة ولكنهم تغلبوا عليها. كيف؟ لقد وجب على اليونانيين أن ينتظروا إشارة من القمر يمكن رؤيتها عند B, A في نفس اللحظة. ولكن ما هي الإشارة؟ إنها خسوف القمر. أنظر شكل (١ - ٩). إن خسوف القمر يعطي أربع ظواهر مرئية عند B, A : (١) البداية، (٢) اتمام

دخول القمر في ظل الأرض، (٣) البداية و(٤) اتمام ظهور القمر من ظل الأرض. هل لاحظت أهمية خسوف القمر؟ قارن الفكرة هنا بما عملنا في شكل (١ - ٣). أليست عبقرية الإنسان شيئاً مذهلا؟



شكل (١-٩)

(١ - ١ - ٤) لماذا ندرِّس التثليث؟

لندع التثليث إلى التعليم. لماذا يهتم الطالب العادي بهذه المثلثات؟ أليس لديه اهتمامات وهوايات أخرى مثل الكرة والتليفزيون؟ إنه بالدرجة الأولى إنسان ولكن لهذا السبب لديه اهتمامات وحب استطلاع. لماذا لا يقدم الموضوع بالطريقة التي تستهويه؟ ما دام أنه لم يصل إلى مرحلة معينة من النضج الفكري فإنه لن يتذوق أويفهم الأمور المعقدة. يجب أن نجعله يعلم أنه بدون المثلثات لا يوجد حساب مثلثات وبدون حساب مثلثات نعود آلاف السنين إلى الوراء إلى عهد الظلمات الذي سبق عهد اليونانيين.

الجزء الثاني : القياسات الفلكية

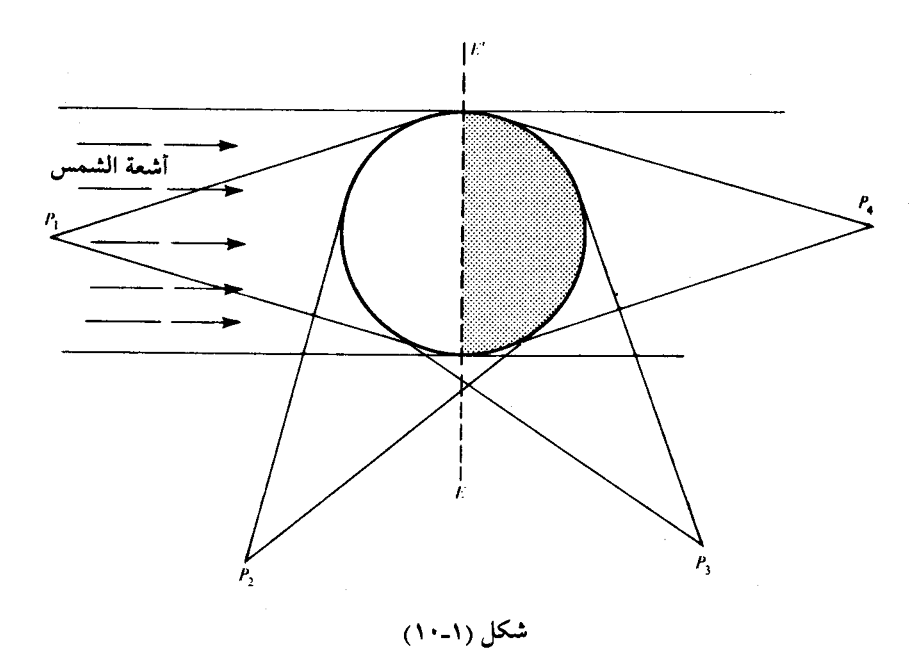
(١ - ٢ - ١) أريستاركوس (Aristarchus of Samos)

أريستاركوس رياضي وفلكي يوناني ولد في جزيرة ساموس حوالي ٣١٠ قبل الميلاد وتوفي حوالي ٢٣٠ قبل الميلاد وقد عاصر إقليدس. تعود شهرته إلى نظريته القائلة بأن الأرض والكواكب تدور في مسارات حول الشمس. لقد كانت أدلته ضعيفة ولكن نظريته كانت عظيمة وقد طورها كوبرنيكس فيما بعد.

مع أن أريستاركوس لم يعرف بعدي القمر والشمس عن الأرض إلا أنه تمكن من تقدير نسبتيهما بالاعتماد على فكرة مدهشة. لتتفهم عبقريته، فكر قليلا ماذا كنت تعمل؟ طريقته تعتمد على فهم أطوار القمر.

لماذا نرى القمر كاملا وأحيانا نصفه وأحيانا لا شيء عند نشوء القمر من جديد؟ القمر يعتمد على الشمس في الإضاءة لأنه لا يصدر ضوءا ذاتيا ولذا فإن نصف سطحه الكروي مضاء والنصف الآخر مظلم. (بصورة أدق، يمكن اعتبار أشعة الشمس الساقطة على سطح القمر متوازية لأن الشمس بعيدة جدا ولذا فإنها تضيء أكثر من نصف سطح القمر بقليل) انظر شكل (١ - ١٠). الشخص الواقف عند P_1 يرى نصف كرة كاملة مضاءة أي قمر كامل. وعند P_2 ماذا يرى؟ إن مجال رؤيته يحتوي على أقل من نصف الكرة المضاءة وقليلا من المنطقة المظلمة. لذا فإنه يرى القمر كشكل أكبر من نصف دائرة. وعند الموقع P_3 يحتوي مجال نظره على قليل من الجزء المضيء وكثير من المظلم.

وحيث إنه يرى الجزء المضيء فقط فإن القمر يظهر له كهلال. من الموقع P_4 لا يرى شيئا من الجزء المضيء ولا يرى قمرا أبدا. من أي مكان بالنسبة للشمس والقمر يمكنه رؤية نصف قمر؟



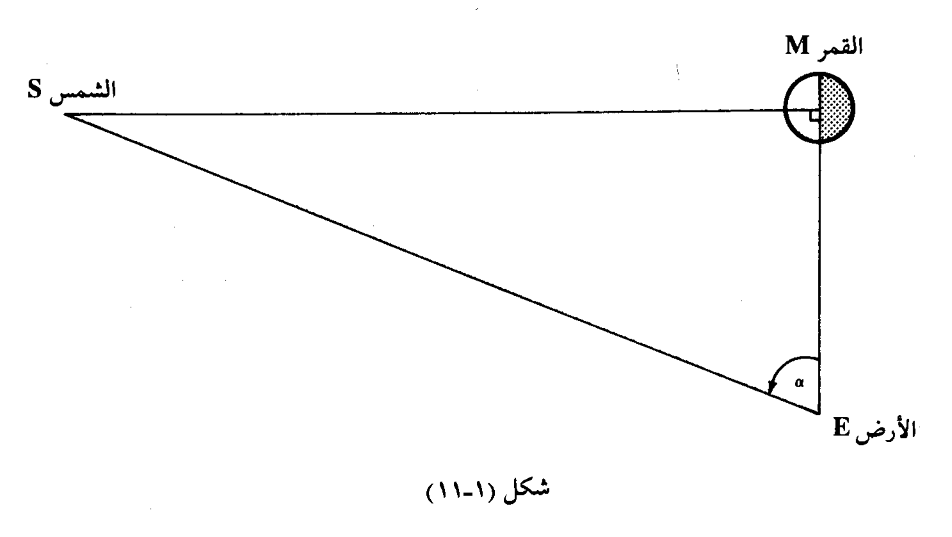
شكل (١-١٠)

أليس واضحا أن الشخص يرى نصف المنطقة المضيئة ونصف المظلمة عندما يكون عند المستقيم EE' ؟ باختصار، في الشكل (١ - ١١)، الشخص الذي على الأرض يرى نصف قمر عندما تكون الزاوية EMS قائمة.

إذا كانت ظروف الطقس مواتيـة فإنـه يمكن رؤ يـة القمر في النهار خصوصا عند الغروب والشـروق. لذا فإنـه يمكن رؤ يـة الشمس والقمـر معـا. أحيـانا يمكن رؤ ية الشمس والقمر عندما يكون طور القمر نصف قمر. نقيس الزاوية MES في هذه الحالة وهذا ما فعله أريستاركوس.

لاحـظ في البـدايـة أنـه بدون الحاجة لأية قياسات نستطيع استنتاج أن الشمس أبعد من القمر كما فعل اليونانيون وهذه نتيجة من كون الوتر أكبر ضلع في المثلث القائم. كذلك لاحظ أنـه بقيـاس α نعـين الـزاويـة الثالثة (متممة α) وهكذا نعرف شكل المثلث EMS بدون أن

نعـرف حجمـه . مع أننـا لم نحسب الطول الحقيقي لأي ضلع فإن نسبة أي ضلعين أصبحت معـروفـة . وهكـذا نستنتج من تعريف جيب التمام أن نسبة المسافات ME (القمر ـ الأرض) و SE (الشمس ـ الأرض) هي $\cos\alpha = \frac{ME}{SE}$



شكل (١-١١)

بعد أن قاس أريستاركوس α وجب عليه حساب $COS\ \alpha$ ولم يكن لديه جداول يستعين بها . لقد كانت نتيجته خاطئة لسببين . الزاوية α قريبة من ٩٠° حيث أي خطأ قليل يؤثر على النتيجـة بصـورة كبـيرة . ثانيـا بالنظر فقط لا يستطيع المرء تحديد متى يكون الطور نصف قمر بالضبـط . ومـع ذلـك فخطـة أريستـاركوس عظيمة جدا ، فحيث إن الشمس أبعد بكثير من القمر عندما يكون نصف قمر وحيث إن حجم الشمس والقمر عند رؤيتهما من الأرض ثابت ، يمكن القول بأن الشمس أبعد من القمر في جميع الأوقات .

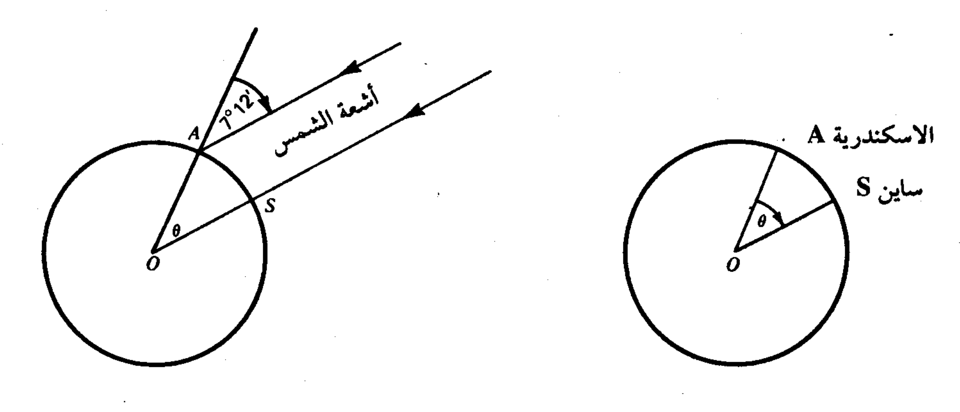
(١ ـ ٢ ـ ٢) نصف قطر الأرض : ايراتوسثنيس (Eratosthenes)

في السـابق عنـد منـاقشـة بعـد القمر عن الأرض ، ذكرنا أنه من الضروري تحديد حجم الأرض . الآن السؤال الهام هو : ما هو نصف قطر الأرض؟

عند التحدث عن نصف قطر الأرض فإننا طبعا نعتبرها كروية الشكل. هل هذا صحيح؟ نحن نعلم أنها ليست كروية بالضبط ولكنها مفلطحة بعض الشيء عند القطبين. ومع ذلك يمكن اعتبارها كروية على وجه التقريب.

إن تحديد حجم الأرض هو إنجاز ايراتوسثنيس الفذ. لقد كان جغرافيا وفلكيا وأيضا أمين مكتبة الاسكندرية الشهيرة والتي كانت أعظم مكتبة في عصرها. لقد عاش من حوالي ٢٨٠ إلى ١٩٥ قبل الميلاد. ومع أن هذه التواريخ ليست أكيدة إلا أن طريقته مؤكدة. والآن نسأل: كيف قاس نصف قطر الأرض؟

نهر النيل ينساب تقريبا من الجنوب إلى الشمال ولذا فإن أقصر طريق من مدينة ساين (الآن تسمى أسوان) إلى الاسكندرية في الدلتا هو جزء من دائرة عظمى. أي أن المدينتين تقعان على نفس خط الطول تقريبا. وحيث إن مصر بلد متحضر فإنه يوجد طريق بين ساين والاسكندرية طوله ٥٠٠٠ ستاديا، أنظر شكل (١ ـ ١٢). فلو عرفنا الزاوية θ عند مركز الأرض والتي تحد هذا القوس لأمكن معرفة كم يمثل AS من محيط الأرض. المشكلة الأساسية هنا تحديد الزاوية θ.



شكل (١-١٣)　　　　شكل (١-١٢)

ايراتوسثنيس كان يعلم أن في مدينة ساين بئرا عميقا جدا تصل أشعة الشمس إلى قاعه في وقت الظهيرة وفي أطول أيام السنة. بمعنى آخر، الشمس تكون في وسط السماء تماما. لذا فقد قاس ميل الشمس على الخط الرأسي في الاسكندرية في وقت الظهيرة في وسط الصيف. بالطبع لم يحتاج إلى ساعة لتحديد أقل ميل للشمس على الرأسي، بل استخدم أقل ميل للشمس لتحديد وقت الظهر. لقد وجد الزاوية $7°12'$. وحيث إن الشمس بعيدة جدا إذن اشعتها متوازية تقريبا. ويصبح الوضع كما هو مبين في الشكل (١ ـ ١٣). حيث إن أشعة الشمس متوازية إذن الزوايا المتناظرة عند O و A متساوية. إذن $\theta = 7°12'$ ومنه نحصل على

$$\frac{\theta}{360} = \frac{7°12'}{360°} = \frac{1}{50}$$

إذن AS يساوي $\frac{1}{50}$ من محيط الأرض. ولكن AS يساوي ٥٠٠٠ ستاديا وهذا يعني أن محيط الأرض ٢٥٠,٠٠٠ ستاديا ونصف قطرها $\frac{250,000}{2\pi}$ ستاديا.

لسوء الحظ لا نعلم أي من وحدات القياس (ستاديا) المستعملة في ذلك الوقت كان ايراتوسثنيسي يعني. الستاديوم ٦٠٠ قدما يونانيا ولكن اليونانيين يستعملون عدة أقدام فمثلا ستاديوم اتيكا ٦٠٧ قدما انجليزياً بينما ستاديوم الالومبي ٦٣٠,٨ قدماً. إذا أخذنا الأول فإن نصف قطر الأرض يصبح :

$$\frac{250,000}{2\pi} \times \frac{607}{5280} \approx 4,600 \text{ miles.}$$

نحن نعرف أن نصف القطر عند خط الاستواء ٣٩٦٣ ميلا ونصف القطر عند القطب يقل عن ذلك بـ ١٣,٥ ميل.

حساب ايراتوسثنيس ليس دقيقا ولكن هذا لا يقلل من عظمة إنجازه. الطريقة هي التي تثير إعجابنا. ألا يستطيع عملاق قياس الأرض بمجرد إحاطتها بذراعيه؟ ولكن ماذا فعل

قزمنا الصغير ايراتوسثنيس؟ في مدينة الاسكندرية وفي ظهر أحد أيام الصيف منذ زمن بعيد، لاحظ ظل عصا صغيرة واستعمل منقلته. مجرد ظل وفكره جعلت من القزم عملاقا يقيس الأرض.

(١ ـ ٢ ـ ٣) نظريات كونية متنافسة

كيف نعرف الوقت بدون استعمال الساعة؟ نعرفه بالنظر إلى مزولة. إن ظل الشمس يعطينا الوقت. في الحقيقة، الساعة ما هي إلا مزولة. إن مكان عقرب الدقائق وعقرب الساعات ما هو إلا بديل لظل الشمس. عندما تحدد الساعة الوقت ـ بصورة أدق الوقت الشمسي المحلي ـ فهي تحدد مكاننا بالنسبة للشمس. إننا لا نستطيع الرؤية في الظلام والإنسان البدائي كان يقوم للعمل مع طلوع الشمس ويعود للنوم مع غروبها. ولكن كيف نقيس العمر؟ نقيسه بالسنوات. لكن ما هي السنة؟ إنها الزمن الذي ينقضي قبل عودة الأرض إلى نفس مكانها بالنسبة للشمس. وكيف نحدد نفس المكان؟ بالاعتماد على مواقع النجوم الثابتة. عندما يتغير مكان الأرض بالنسبة للشمس فإن الأيام تطول ثم تقصر ثم تعود فتطول مرة أخرى. هناك دورة للفصول ـ وقت للبذر ووقت للحصاد. التقويم اعتراف بهذه الدورة.

أليست حياتنا جميعا منظمة بالساعة والتقويم؟ أليس وجودنا يعتمد على دوران الأرض بالنسبة للشمس؟ بدون الشمس، نصبح في ليل أبدي، لا يوم ولا اسبوع ولا شهر ولا سنة؛ لا وقت للبذر ولا وقت للحصاد. مع أن علم التنجيم ليس تطبيقا ناجحا لعلم الفلك إلا أنه خدم غرضاً. لقد أعطى دفعة إضافية لعلم الفلك إضافة إلى بعض التطبيقات العملية ودراسة النجوم لتحديد التقويم وللاهتداء بالنجوم في البحار. هناك دلائل من اللغة الانجليزية على اهتمام خاص بالنجوم السيارة (الكواكب): يوم الأحد (*Sunday*)، هويوم الشمس، يوم الاثنين (*Monday*) هويوم القمر، يوم الثلاثاء (*Tuesday*) هويوم المريخ، يوم

الأربعاء (*Wednesday*) هو يوم عطارد، يوم الخميس (*Thursday*) هو يوم المشتري، يوم الجمعة (*Friday*) هو يوم الزهرة ويوم السبت (*Saturday*) هو يوم زحل.

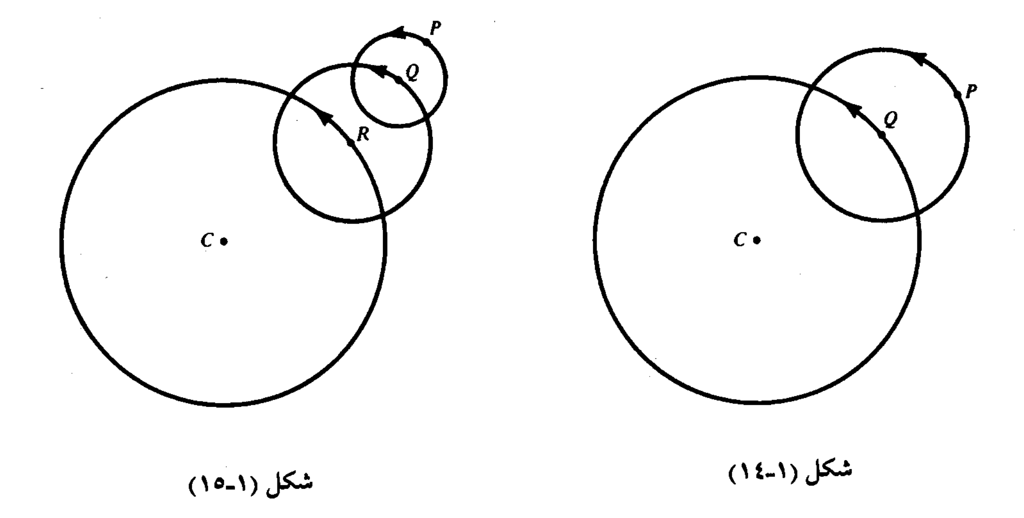
وبالنسبة للإنسان الأول، كانت الطبيعة غير مأمونة ومخيفة. حتى اليونانيون كانوا يرون تحت كل شجرة وحجر إلٰها لا يعرف مزاجه. لقد كانت مسارات الكواكب بمثابة دلالة على شيء من الثبات والنظام في هذا العالم المجهول. هذه النجوم السيارة كما سماها اليونانيون - بعكس النجوم الثابتة - ظهر أنها تسير في مسارات ثابتة. لوحظ أن الكواكب تظهر في نفس المكان (بالنسبة للنجوم الثابتة) بعد فترات زمنية معينة. بالرغم من شعورهم بعدم النظام في الطبيعة، هناك بعض الأشياء التي يمكن التنبؤ بها. بدراسة تطبيق الرياضيات على علم الفلك نشاهد أولى المحاولات لاكتشاف النظام في الطبيعة. لقد أعطت النجوم الإنسان الفكرة العظيمة وهي أنه يوجد قوانين وأنظمة يمكن اكتشافها. إنه لمن المستحيل المبالغة في أهمية وجهة النظر هذه - إنها برعم العلم.

اعتقد أرسطو *Aristotle* (٣٨٤ - ٣٢٢ قبل الميلاد) أن الكواكب يجب أن تأخذ حركة دائرية منتظمة. ما هي حجته؟ ببساطة هي أن الكواكب بالضرورة أجسام مثالية. ولذا فهي كروية ولأن الشيء المثالي يجب أن يتحرك بحركة مثالية وهي الحركة الدائرية المنتظمة. قد تضحك من هذا ولكن معاصريه لم يضحكوا. أرسطو لم يسبب ابتسامة واحدة لمدة ألف سنة. نظريته بقيت ولم تسبب أي تناقض حتى العصور الوسطى. لقد تكلم مؤسس علم الحيوان والصخور والمنطق وبقي على الآخرين أن يتبعوا القائد وينصاعوا لسلطته.

حركة الكواكب الدائرية طرحت قبل أرسطو، ولكن بعده أصبحت إلزامية. السؤال هو: الحركة الدائرية حول ماذا؟ كون الشمس تدور حول الأرض أمر طبيعي ونظرية هيباركوس *Hipparchus* (١٦٠ - ١٢٥ قبل الميلاد) والتي طورت من قبل بطليموس

Ptolemy (حوالي ١٣٠ قبل الميلاد) والقائلة بأن جميع الكواكب تدور حول الأرض لاقت قبولا عاما.

الملاحظة لم تطابق النظرية بالضبط. لذا فبالنسبة لليونانيين الكوكب الذي لا يتحرك في دائرة تكون حركته مركبة من عدة حركات دائرية. انظر الشكل (١ - ١٤)، حيث نوضح تركيب حركتين دائريتين. عندما تدور P حول الدائرة بمركز Q فإن Q تدور في دائرة مركزها C. مسار النقطة P (دائري أودوري بالنسبة للنقطة Q) يسمى فلك تدوير (*epicycle*). وحتى اذا لم توافق هذه الحركة المركبة الحقائق، فقد جرب فلك تدوير لفلك تدوير آخر في أوقات لاحقة. انظر شكل (١ - ١٥). هنا تركيب ثلاث حركات دائرية. عندما تدور P حول المركز Q و Q نفسها تدور حول R فإن R تدور حول المركز C. هذه النقطة مهمة لفهم طبيعة العلم. بجعل الفرضية معقدة بصورة كافية نحصل على مرونة كافية تجعلها تتفق مع الحقائق. الفرضيات العلمية المهمة هي الفرضيات البسيطة والمعقولة والمتفقة مع الحقائق. نذكر نظرية أخرى منافسة، نظرية أريستاركوس. هذه النظرية تقول بأن الأرض والكواكب الأخرى تدور حول الشمس. مع أن هذه النظرية تتفق مع معظم الحقائق المعروفة آنذاك إلا

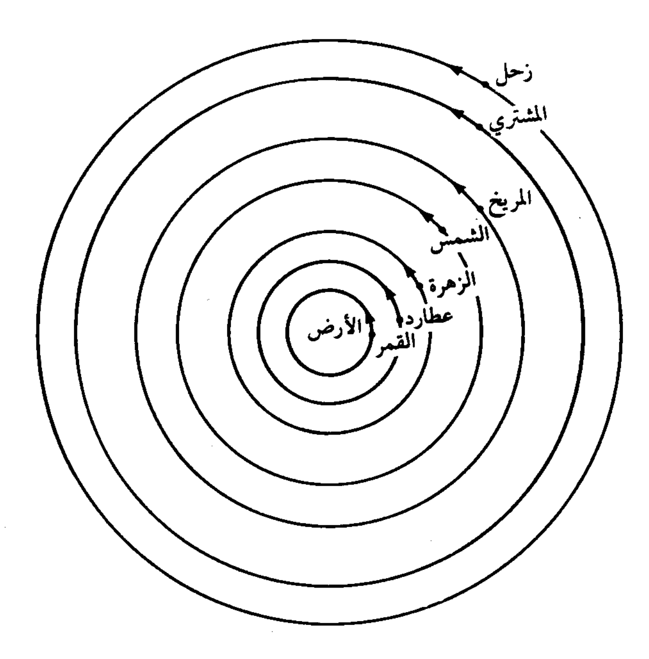


شكل (١-١٥) شكل (١-١٤)

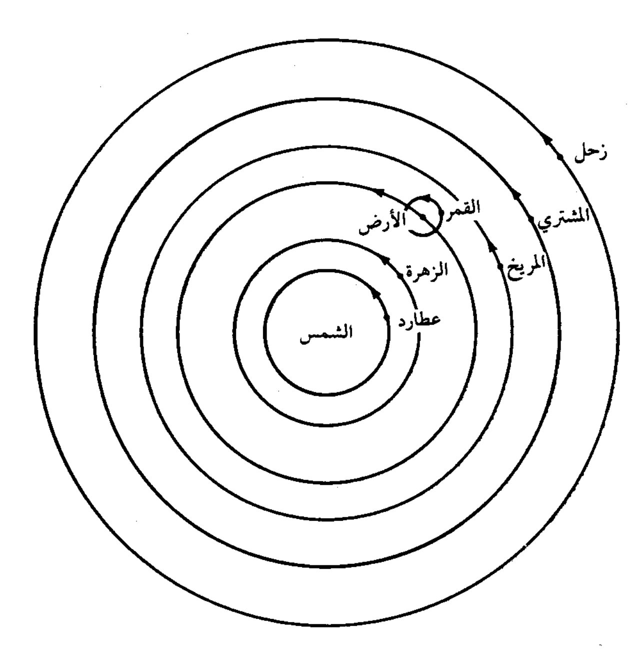
أنها رفضت من الجميع ، لقد رفضها أيضا أرخميدس *Archimedes* (٢٨٧ ـ ٢١٢ قبل الميلاد) أعظم رياضي وفيزيائي ومخترع في العهد القديم .

لماذا رفضت النظرية؟ بدون شك موقف أرخميدس كان له دور في رفضها . يجب أن نتذكر أن الكبرياء والتحيز قد يؤثر على تفكيرنا . سابقا ، تساءلنا عن بعد القمر عن الأرض ولم نسأل ما هو بعد الأرض عن القمر؟ كلا السؤالين لهما نفس الإجابة ولكن لماذا الأول وليس الأخير؟ عندما نسافر نبدأ من المكان الذي نحن فيه بالضرورة . أليس السؤال الأول هو السؤال المعقول؟ عندما نكون في قارب محاط بالضباب ، أليس من الطبيعي أن نعتقد أن قارب الآخرين يتحرك من أمامنا وليس قاربنا الذي يتحرك من أمامهم؟ أليست نظرية مركزها الأرض أسهل وأقرب إلى أذهاننا من نظرية مركزها الشمس؟

شكل (١ ـ ١٦) يوضح نظرية بطليموس المقبولة والتي مركزها الأرض ، وشكل (١ ـ ١٧) يوضح نظرية أريستاركوس المرفوضة ومركزها الشمس (وحيث القمر يدور حول الأرض) . بعد حوالي سبعة عشر قرنا ، اكتشف نظام أريستاركوس من قبل كوبرنيكس *Copernicus* (١٤٧٣ ـ ١٥٤٣) . كان الاستشهاد بالأعلام مثل أرسطو مطلوب ولكن لا يمكن الاستشهاد بأرسطو هنا ولذا فقد استشهد كوبرنيكس بأريستاركوس (فيما بعد أسقط استشهاده هذا) . لقد طور كوبرنيكس نظرية أريستاركوس ولم يكتشفها . لقد قارنها وفحصها في ضوء مشاهداته ومشاهدات الفلكيين الآخرين . مع أنه كان رجلا ذا شجاعة علمية كبيرة إلا أنه كان حذرا . كان يعلم أن الناس لا يحبون تغيير أنماط أفكارهم القديمة أو عادة عدم التفكير إطلاقا ولذا فقد أجل نشر اكتشافاته قرابة ثلاثين سنة حتى أصبح على فراش الموت . ولم يدَّع أن الأرض والكواكب تدور حول الشمس ، لقد اكتفي بإثبات أن افتراض مركزية الشمس أفضل وأسهل من مركزية الأرض ، إنها لا تحتاج إلى الكثير من أفلاك التدوير .



شكل (١-١٦) (نظام بطليموس)



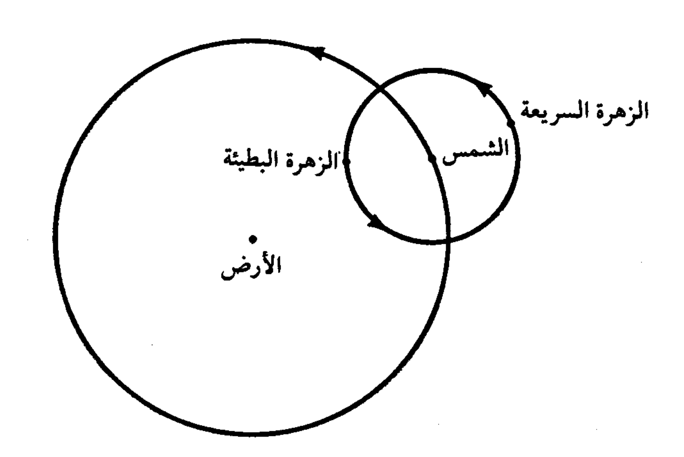
شكل (١-١٧) (نظرية اريستاركوس)

(١ ـ ٢ ـ ٤) مـدار الزهـرة

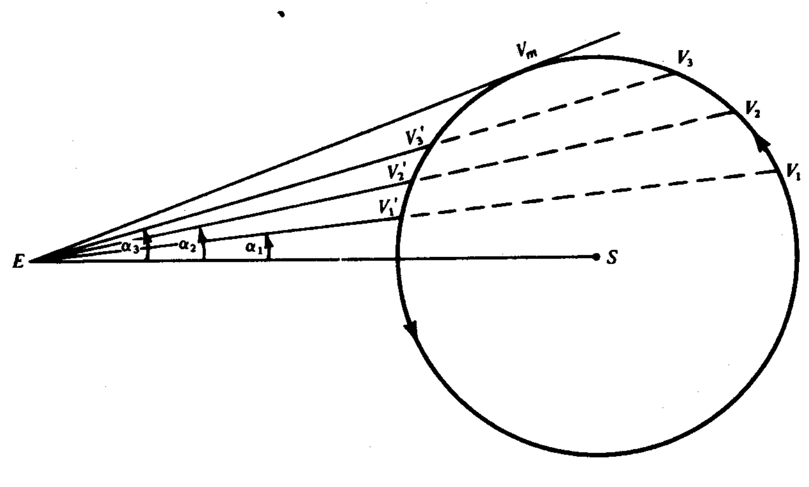
هنـاك نظـريـة قديمـة لهيراكليـدس *(Herakleides)* والـذي عاش في القـرن الرابع قبل الميـلاد. لقـد تتلمذ على أفلاطون *(Plato)* وربما على أرسطو أيضا. كانت نظريته وسطا بين نظــريتي بطليمـوس وكـوبـرنيكس. بالنسبـة لهيراكليـدس، عطـارد والـزهـرة يدوران حول الشمس، بينما الشمس نفسها وجميع الكواكب الأخرى تدور حول الأرض.

النجم السـاطـع الـذي كثيرا ما نراه عنـد غروب الشمس يدعى نجم المسـاء، والنجم السـاطـع الـذي نراه عنـد طلوع الشمس يدعى نجم الصبـاح. مع أن هذه الأسـماء لا تثـير الدهشة إلا أنه كانت هناك دهشة كبيرة عندما اكتشف أن نجم الصباح ونجم المساء هما نفس النجم. هذا النجم هو كوكب الزهرة. لقد كانت حركته محيرة. لقد أثبتت الملاحظة الطويلة أنـه يظهـر في نفس المكـان بالنسبـة للنجـوم الثـابتة، وأنه يكون دائما قريبا من الشمس ولكنه يتحـرك أحيـانـا بسـرعـة في اتجـاه الشمس وأحيـانا ببطء في الاتجاه المعاكس. ولكن الأجسام الكـرويـة المثـاليـة تتحـرك بحـركـة مثـاليـة دائـرية منتظمة. ما هو السبب في هذا الاختلاف الظـاهـري؟ بالنظر إلى الشكل (١ ـ ١٨)، نفهم تفسير هيراكليدس لهذه الظاهرة. مجرد أننا في الوقت الحاضر نعرف أن مسار الزهرة ليس دائريا بالضبط وأن حركته ليست منتظمة لا يقلل من عبقرية هيراكليدس. الشيء المدهش هو أن فرضيته تطابق الحقائق بدقة عجيبة.

إن الدقة التقريبية لفرضية هيراكليدس تدعو إلى السؤ ال التالي: ما هو نصف قطر مدار الـزهـرة حول الشمس؟ هذا يثـير سؤالاً آخـر: كيف نقيس نصف القطر هذا؟ لنبدأ بدراسة الشكل (١ـ١٩).



شكل (١ - ١٨)



شكل (١-١٩)

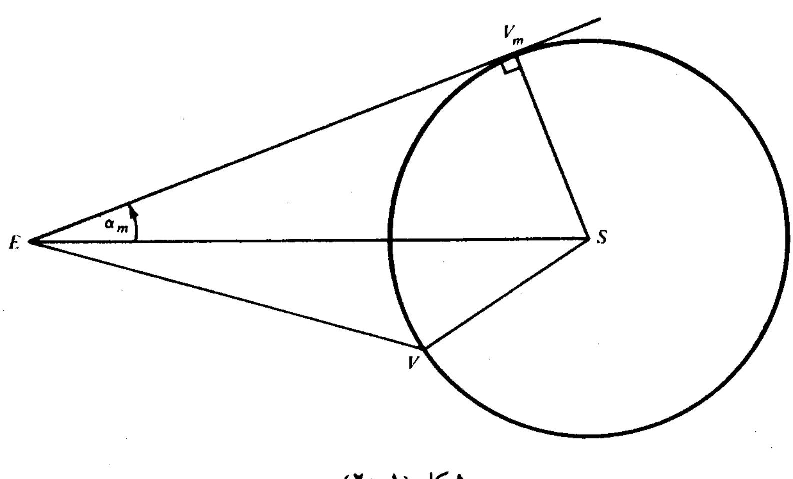
لاحـظ أن الـزاوية α_m بين المستقيم الواصل من الزهرة إلى الأرض والمستقيم SE تتغير عندما تتحرك الزهرة في مدارها. لاحظ أيضا أن :

$$\angle SEV_1 = \angle SEV_1'$$
$$\angle SEV_2 = \angle SEV_2'$$
$$\angle SEV_3 = \angle SEV_3'$$
$$\angle SEV_m = \angle SEV_m.$$

باختصار، α تزداد إلى نهاية عظمى عندما تكون الزهرة عند V_m وبعد ذلك تتناقص. أين تكون V_m ؟ خذ الأوتار المتتالية V_1V_1' ، V_2V_2' ، V_3V_3' كل واحد منها أقصر من الذي قبله. طبعا EV_m هو الوضع النهائي المماس للدائرة. لذا فالزاوية 1 تأخذ قيمتها العظمى ولتكن α_m عندما تكون الزاوية SV_mE قائمة. انظر الشكل (١ - ٢٠) بما أن SV و SV_m أنصاف أقطار للمسار الدائري فان

$$\frac{SV}{SE} = \frac{SV_m}{SE}$$

وبما أن $\angle SV_mE$ زاوية قائمة، إذن $\sin \alpha_m = \frac{SV}{SE}$ ومنه نجد أن $\sin \alpha_m = \frac{SV_m}{SE}$



شكل (١-٢٠)

إذن نصف قطر مدار الزهرة يساوي $\sin \alpha_m$ مضروبا في المسافة بين الأرض والشمس. طبعا نحن لا نعرف المسافات الحقيقية وإنما نسبتها فقط. ولكن أليس مدهشا وعجيبا ما يمكن عمله باستعمال أبسط مبادىء الهندسة وحساب المثلثات؟ لكي نطبق قانوننا هذا نحتاج إلى قيمة الزاوية α_m . كيف نحصل عليها؟ بمراقبة الزهرة عندما تكون عند النقطة V_m . ولكن كيف نعرف متى تكون الزهرة هناك؟ لا نستطيع الحصول على α_m

بملاحظة واحدة. يجب أخذ قياسات عديدة منتظمة عند الغروب والشروق يوما بعد يوم. بدون العديد من الملاحظات لا نستطيع أن نعرف متى تتوقف α عن الزيادة وتبدأ في النقصان؟ إن تقدم العلم يتطلب تصميماً عنيداً بالإضافة إلى أفكار نيرة.

(١ - ٢ - ٥) تايخو براهي وكبلر

تايخو براهي (*Tycho Brahe*، ١٥٤٦-١٦٠١) رجل غني من أشراف بلاد الدانمارك وكان يملك الأراضي الكثيرة والعبيد ومزاجا عدوانيا. لقد دفعه مزاجه هذا في صغره إلى مبارزة فقد بسببها أنفه واستبدله بأنف فضي وأدى هذا إلى انعزاليته عن المجتمع. بدون شك هذه السلسلة من الحوادث زادت من اهتمامه بعلم الفلك (لأنه علم غير اجتماعي). على كل حال، كان لديه شغف شديد بالمراقبة المستمرة والدقيقة للنجوم وهذه الهواية هي سبب شهرته. لا، إنه لم يضع أي نظريات جديدة. بسبب ثرائه وحصوله على مساعدات من أمراء آخرين، استطاع بناء آلات مراقبة ضخمة ودقيقة وباهظة الثمن، وضعت مقاييس جديدة للدقة في المراقبة. إننا هذه الأيام نغفل إسهام براهي الحيوي لعلم الفلك والعلم بصورة عامة.

كبلر (*Kepler*، ١٥٧١-١٦٣٠) كان فقيرا جدا. كانت كراسي الأستاذية في علم الفلك قليلة، ومزابنة الأمراء كانت أكثر أهمية وحيث إن هذه المزابنة تركز على التنجيم وليس على الفلك، فقد حصل كبلر على قوته من التنجيم وهكذا استطاع دراسة علم الفلك وقد كان يقول إن التنجيم ابن الفلك، أليس من الطبيعي أن يهتم الابن بأبيه؟

لقد كان عبقريا. إن أعماله تمثل الانتقال من نظرة القرون الوسطى إلى النظرة الحديثة. لهذا السبب يسميها كوستلر الحد الفاصل (*The Watershed*) في كتاب بهذا العنوان. قبل عهد كبلر كان الفكر يخضع لمزيج من التنجيم والتصوف والخرافات منذ عهد البابليين وبعده ظهرت

النظـرة العلميـة الحـديثة. لقد كانت كتاباته مزيجا من الاثنين. لعدم توفر المادة لديه لم يتمكن من شراء أدوات دقيقـة للمـراقبـة، وأخـيرا قابـل تايخـوبراهي وحصل على معلوماته الكثيرة والدقيقة، إن المعلومات كانت دقيقة لدرجة لا يصدقها اليونانيون.

كان كبلر يطمح في وصف مسار المريخ بدقة. لقد جرب الكثير من أفلاك التدوير بدون جدوى. في النهاية وبعد أربع عشرة محاولة فاشلة، توصل إلى النتيجة القائلة بأن المسار ليس دائريا ولا هو مركب من دوائر. إنه شيء آخر. نتيجة كبلر كانت جديدة ومثيرة، لقد أُخذت أفلاك التدوير كمسلمات منذ عهد أرسطو قبل سبعة عشر قرنا. إن رفض كبلر لتعاليم أرسطو يمثل عبور الحد الفاصل. بنشاط وشجاعة، استمر في حساباته لاختبار فرضيات أخرى، وفي النهاية ساعد اكتشاف اللوغاريتمات في تسهيل العمليات الحسابية. أخيراً توصل إلى الفرضية القـائلة بأن المـريخ يتحرك بصورة غير منتظمة في مسار بيضاوي حيث تقع الشمس في إحدى بؤرتيـه. هذه بدعـة بالتأكيـد. كيف تكـون الشمس عنـد بؤرة دون الأخـرى؟ كيف يدور الكـوكب بسـرعـة غير منتظمـة؟ كيف يكـون الكون غير متناسق بهذه الصورة؟ لكن المراقبة والمشاهدة تتفق تماما مع الفرضية.

إن ما يدرَّس في هنـدسـة أقليـدس من أن النظـريـات نتائج حتمية للفرضيات قد يعطينا فكـرة خاطئـة وهي أن العلم يتطـور بصـورة منطقيـة. هذا أبعـد ما يكـون عن الحقيقـة. إن الـلاعقـلانيـة أوضـح ما تكـون في تاريـخ علم الفلك وأوضح ما يكون التحيز ضد الحقيقة في الاعتقاد العميق بأن الأجرام السماوية مثالية وتتحرك بصورة مثالية.

النظـريـة الحـديثـة في الفلك أدت إلى تغـير في نظرتنا إلى العالم وإلى وجهة نظر جديدة وأيضا حضارة جديدة. حتى قبل عهد «سبوتنك» بعض الإدراك لهذه الأمور كان من متطلبات حياتنا المعاصرة. طبعا الطلاب يريدون معرفة المزيد. كمقدمة جيدة نذكر الكتابين التاليين:

Morris Klein, Mathematics: A Cultural Approach,

Arthur Koestler, The Sleepwalkers

عنوان هذا الكتاب الأخير مناسب جدا حيث إن الذي يسير وهو نائم بأعين مغلقة يعرف طريقه.

لقد خمن أريستاركوس أن النظام الفلكي شمسي المركز والدلائل لديه قليلة، لقد كان يعرف القليل جدا لدرجة أن عينيه كانت مغلقة ولكنه تحرك ببديهة أكيدة. فيما بعد أغمض الفلكيون أعينهم عن الحقائق. إنها قصة أغرب من الخيال.

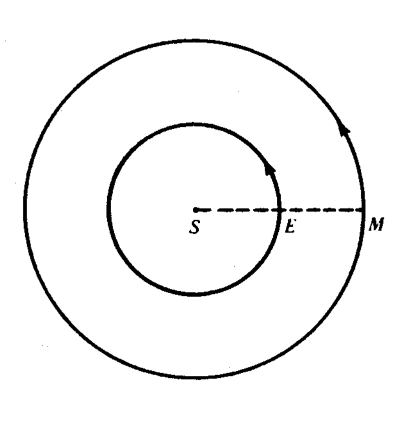
(١ - ٢ - ٦) سنة المريخ

نعود مرة أخرى إلى كبلر: كيف اكتشف مدار المريخ؟ وعلى أي أساس؟ فرضيته الأساسية هي أن المريخ والأرض يدوران في نفس المستوى بحركة دائرية منتظمة حول الشمس. نحن نعرف الآن مثل كبلر أن هذا ليس صحيحا فالمدارات ليست في نفس المستوى وليست دائرية والحركات ليست منتظمة. إن فرضيته تمثل تقريبا أوليا يمكنه من معالجة المشكلة. التقريب الأولي المناسب هو الخطوة الأولى للوصول إلى نتائج أكثر دقة.

من نتائج فرضية كبلر أن المريخ سيكون في نفس المكان الفلكي بالنسبة للشمس عند فترات زمنية منتظمة. طول هذه الفترة، أي الزمن الذي يستغرقه المريخ في الدوران حول الشمس يسمى سنة المريخ. وكذلك الوقت الذي تدور فيه الأرض حول الشمس مرة واحدة هو سنة الأرض. لقد كان على كبلر أن يعين سنة المريخ على أساس أن سنة الأرض هي وحدة الزمن.

مع أن المريخ والأرض يدوران حول الشمس في نفس الاتجاه، إلا أنهما يتحركان بسرعات زاوية مختلفة. ولذا فإن الشمس والمريخ يكونان في وقت ما متعاكسين تماما عند رؤيتهما من على الأرض وعندئذ تكون الزاوية بينهما ١٨٠°. عندما يحدث هذا نقول إن الشمس والمريخ في حالة تقابل. انظر الشكل (١-٢١).

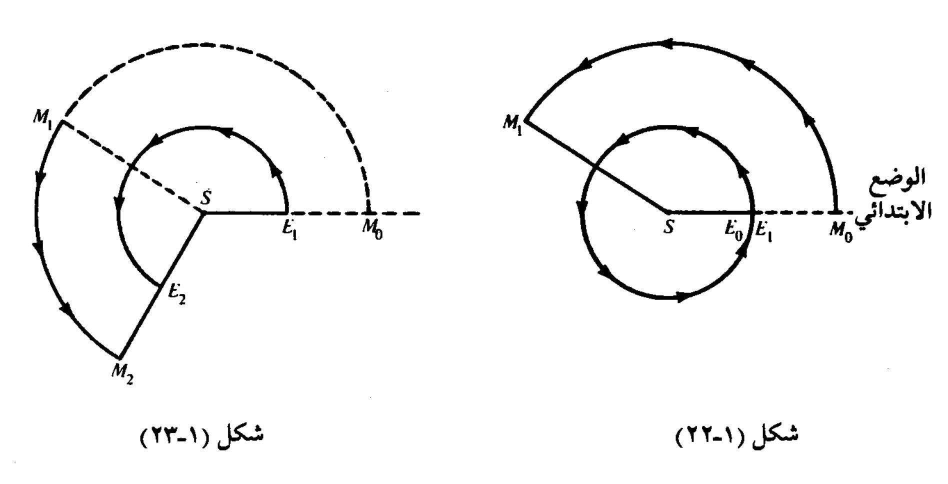
يمكن مراقبة التقابل بدقة كبيرة. تذكر أن اليوم الكامل بأربع وعشرين ساعة يمثل الفترة الزمنية بين وجود الشمس في كبد السماء مرتين متتاليتين، لذا فبسبب دوران الأرض حول محورها تكون الشمس في الجهة المعاكسة من الأرض بعد اثنتي عشرة ساعة من وقت الظهر أي في منتصف الليل. فإذا كان المريخ عند منتصف الليل في وسط السماء فإنه يوجد تقابل.



شكل (١-٢١)

يمكن اعتبار شكل (١-٢١) ساعة سماوية، ولكن العقارب ليست للساعات والثواني: SE «عقرب» الأرض وSM «عقرب» المريخ. لنفرض أن سنة الأرض T_E (الوقت اللازم ليتم عقرب الأرض دورة كاملة) معلومة: لقد حسبها البابليون بدقة عظيمة. لو كان SM ثابتاً لتطابقت العقارب بعد دورة كاملة لعقرب الأرض، بمعنى آخر T_E هو الزمن الدوري P بين تقابلين متتاليين. لو دار SM في نفس الاتجاه وبنفس السرعة الزاوية لـ SM لأصبح لدينا تقابل في جميع الأوقات والزمن بين تقابلين في هذه الحالة صفر. ومن الواضح أيضا أنه لو دار SM بنفس السرعة الزاوية ولكن في الاتجاه المعاكس، لحصلنا على تقابل بعد أن يكمل SE (وSM) نصف دورة، أي بعد $\frac{1}{2} T_E$. أليس من الواضح أن P (الفترة الزمنية بين تطابقين متتاليين لعقارب ساعتنا هذه) مرتبطة بسرعتيها الزاوية، أو بمعنى آخر أن P تعتمد على T_E و T_M ؟ إن أساس مشكلة تحديد T_M هو تحديد هذه العلاقة بين T_E وP و T_M.

إن ساعتنا السماوية غريبة نوعا ما حيث إن نسبة سرعات العقارب الزاوية ليست ١ : ١٢ ولكن النسبة ثابتة على كل حال. هل يسبب هذا أي تغيير جذري في المسألة؟ طبعا لا.



شكل (١-٢٣)

شكل (١-٢٢)

دعونا الآن نوضح باختصار موقع العقارب في حالة التقابل كما في الشكل (١-٢١). بما أن عقرب الأرض يدور بسرعة أكبر فإنه يتم دورة كاملة قبل عقرب المريخ. عندما يعود SE إلى الخط الأصلي، يكون SM قد قطع جزءا من الدورة. انظر الشكل (١-٢٢).

لنتجاهل أن الوضع في الشكل (١-٢٢) ينتج عن الشكل (١-٢١) ونركز على ما يحدث بعد الوضع الموضح في (١-٢٢). إن الوضع شبيه بسباق العدَل: E على خط البداية معاقه بالنسبة لـ M والتي تبدأ من المكان المتقدم M_1 ولكن سرعة SE أكبر من سرعة SM ولذا تلحق E بـ M عاجلا أو آجلا. لنفرض أن هذا يحدث عندما يدور SE بمقدار زاوية α (حيث تقاس من خط البداية طبعا). عند نهاية السباق تصبح الأوضاع كما في الشكل (١-٢٣). أثناء دوران SM من SM_1 إلى SM_2 ، تدور SE حول الزاوية α من خط البداية إلى SE_2 .
الآن لاحظ الشكل (١-٢١). أثناء الفترة بين تقابلين متتاليين، يدور SM من خط البداية إلى SM_2 ، أي عبر زاوية مقدارها α . تذكر أيضا أن SE قطع دورة كاملة قبل بداية سباق العدل. نستنتج مما سبق أنه إذا دار SM بمقدار الزاوية α في الوقت P بين تقابلين متتاليين فإن SE يدور بمقدار الزاوية $\alpha + 360°$.

إنه من المفيد إعادة النظر فيما سبق . ألا تبدو النتيجة واضحة الآن؟ الآن نعرف الطريقة الصحيحة لمعالجة المشكلة : بعد وضع التقابل مباشرة يتقدم عقرب الأرض SE ولذا فعليه أن يدور بزاوية ٣٦٠° أكثر من عقرب المريخ لكي يلحق به مرة أخرى .

الباقي واضح وسهل . من مراقبة المريخ والأرض نحصل على الجدول التالي :

الكوكب	الفترة الزمنية	الزاوية المقطوعة في هذه الفترة الزمنية
المريخ	P T_M	α 360
الأرض	P T_E	$360+\alpha$ 360

ولكن في حالة الدوران بسرعة منتظمة ، يتناسب زمن الدوران طرديا مع زاوية الدوران .

ومن بيانات المريخ نحصل على :

$$\frac{P}{T_M} = \frac{\alpha}{360} \qquad (١)$$

ومن بيانات الأرض نجد أن

$$\frac{P}{T_E} = \frac{360 + \alpha}{360} \qquad (٢)$$

لنربط T_M بـ T_E ما علينا إلا التخلص من α . من (٢)

$$\frac{P}{T_E} = 1 + \frac{\alpha}{360} .$$

ومن (١)

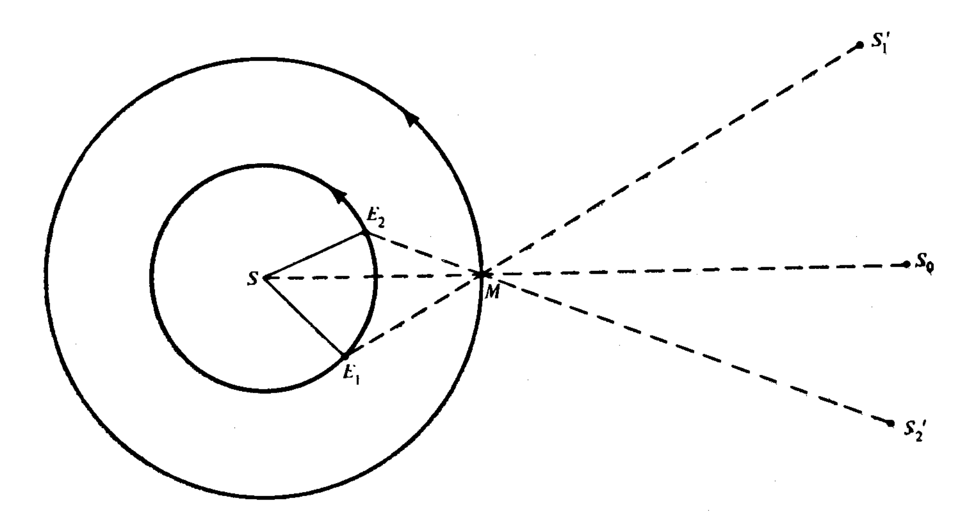
$$\frac{P}{T_E} = 1 + \frac{P}{T_M}.$$

وبهـذا نحصـل على العـلاقـة بين T_M وP و T_E . وحيث إن الأخـير معلوم ، يبقى علينا قياس P لكي نستطيع حساب T_M . لقد حسب اليونانيون P وكبلر حسب T_M .

(١ - ٢ - ٧) مدار المريخ

يجب أن نتـذكـر أن هدف كبلر كان تحديـد مدار المريخ بدقة ، القارىء الفطن قد يسأل : كيف يؤدي حساب T_M إلى هذه الغاية؟

خذ الشكــل (١-٢٤) ، حيث المـريـخ عنـد M وعلى خط مستقيم مع الشمس S ونجم ثابت S_0 وافـرض أن الأرض في هذا الـوقت عنـد E_1 . بعـد T_M من الـزمن بالضبط



شكل (١-٢٤)

يكمـل المـريـخ دورة حول الشمس ويعود إلى M ، وبما أن عقرب الأرض في ساعتنا السماوية أسرع من عقرب المريخ ، فإن الأرض تكون قد دارت أكثر من دورة واحدة وتكون عند النقطة

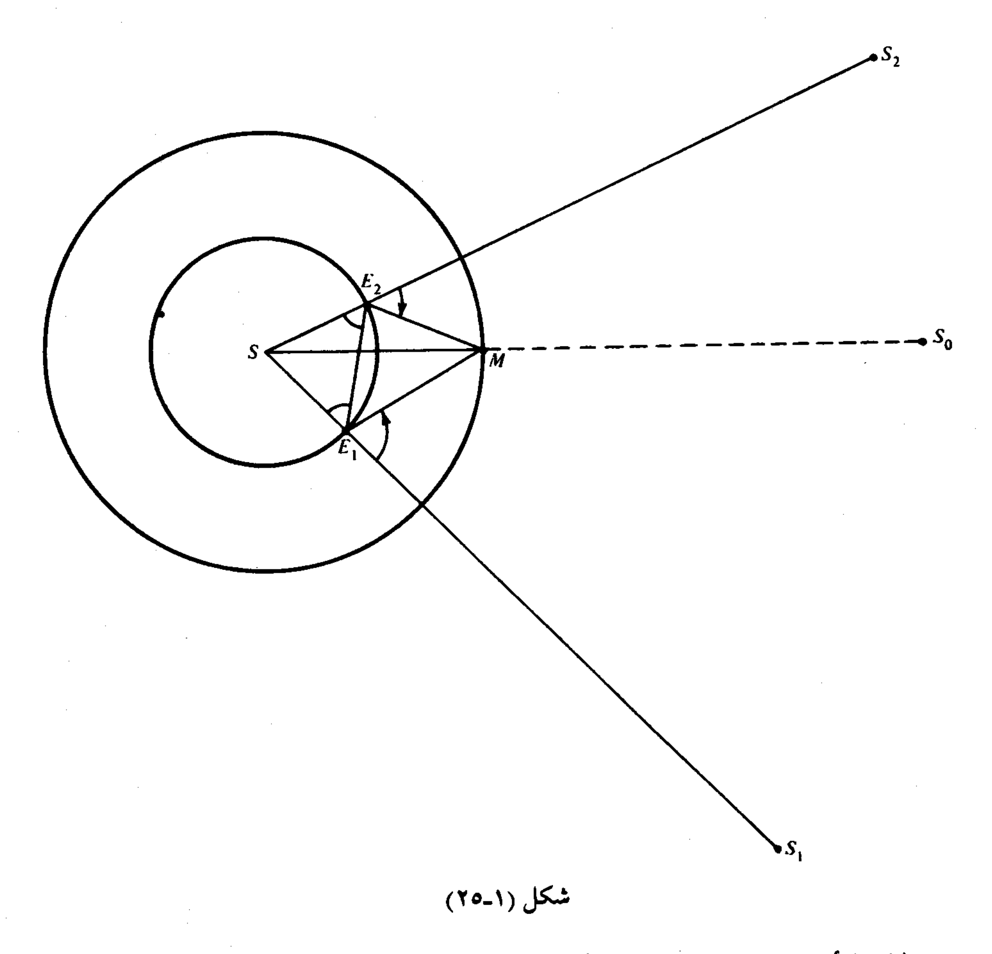
E_2 . بالرغم من أن المريخ يعود إلى مكانه الأصلي بالنسبة للنجوم الثابتة عندما يراقب من الشمس إلا أنه (المريخ) يكون في مكان آخر بالنسبة للنجوم الثابتة عندما يراقب من الأرض. في البداية المريخ على استقامة مع الأرض والنجم S_1' وبعد T_M يصبح على استقامة واحدة مع الأرض والنجم S_2' . مع أن المريخ عند M يظهر بالنسبة للنجوم الثابتة وكأنه في أماكن مختلفة عندما يراقب من الأرض في E_1 و E_2 إلا أننا نعلم أنه في نفس المكان حيث إن سنة المريخ هي T_M .

نستطيع استنتاج أكثر من ذلك. بما أن T_M معلوم فإن السرعة الزاوية لعقرب الأرض معلومة أيضا ولذا يمكن حساب الزاوية المقطوعة في الفترة T_M : نستطيع تعيين $\angle E_1SE_2$. وحيث إن نصف قطر مدار الأرض معروف، فإن طول القاعدة E_1E_2 وزوايا القاعدة للمثلث المتساوي الساقين E_1SE_2 تصبح محددة.

ماذا نحتاج أيضا لحساب SM ؟ ما هي الأشياء التي يمكن قياسها بسهولة ودقة؟ إنها الزوايا. خذ الشكل (١-٢٥). إن موقع الأرض بالنسبة للشمس والنجوم الثابتة قد درس بعناية منذ عهد البابليين؛ تايخوبراهي أيضا حصل على معلومات دقيقة جدا. هذه المعلومات مكنت كبلر من تعيين النجم الثابت S_1 الذي على استقامة الشمس والأرض أو قريب من ذلك عندما تكون الأرض عند E_1 على سبيل المثال. لقد ذكرنا أنه مع أن الشمس غير مرئية بالنسبة للفلكي الأرضي عند E_1 وهو يرصد S_1 إلا أنها مرئية عن طريق الاستدلال. وهكذا استطاع كبلر حساب $\angle S_1E_1M$ (حيث يمر امتداد S_1E_1 في S) عندما تكون الأرض عند E_2 . (يجب ملاحظة عدم الخلط بين النجم الثابت S_1 في شكل (١-٢٥) و S_1' في شكل (١-٢٤): S_1 على استقامة واحدة مع E_1 وS؛ S_1' على استقامة واحدة مع E_1 وM. وكذلك عدم الخلط بين S_2 و S_2').

ما الفائدة من هذه المعلومات الإضافية؟ $\angle E_2E_1M$ مكملة مجموع زاويتين معلومتين هما $\angle SE_1E_2$ و $\angle S_1E_1M$ ولذا فهي محددة. كذلك $\angle E_1E_2M$ محددة. في

$\triangle E_1E_2M$ ، أصبح لدينا زاويتان والضلع (E_1E_2) معلومة، ولذا يمكن حساب E_2M عن طريق قانون الجيب. كذلك الزاويتان $\angle SE_2E_1$ و $\angle E_1E_2M$ معلومتان، لذا ففي $\triangle SE_2M$ نعرف الزاوية SE_2M وأضلاعها، باستعمال قانون جيب التمام نحصل على SM.



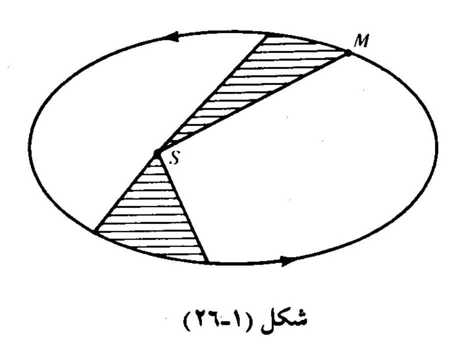
شكل (١-٢٥)

لاحظ أن فرضيات كبلر تقتضي أن يعيد المريخ دورته بانتظام: بغض النظر عن مكانه في وقت معين، سيكون في نفس المكان بعد فترة زمنية T_M . لذا فالطريقة السابقة تصلح لقياس طول عقرب المريخ في ساعتنا السماوية مهما كان المكان. بهذه الطريقة أصبحت T_M أساسية لحساب مدار المريخ حول الشمس.

بعد عدة قياسات للبعد القطبي للمريخ، بدأ كبلر بنشاط للتنسيق بين النظرية والحقائق. حصوله على معلومات تايخوبراهي أعطاه معلومات دقيقة لم تكن معروفة لدى اليونانيين ولذا كان واجبه أكثر صعوبة. أخيرا، أثناء محاولته الرابعة عشر حصل على مدار نظري مبني على أفلاك التدوير يطابق المدار الحقيقي تقريبا: كان هناك اختلاف طفيف، مجرد ثماني دقائق من القوس. هذا الفرق البسيط والذي لم يكن ليأبه به اليونانيون لم يرض كبلر. وهكذا رفض كبلر مفهوم الدوائر وأفلاك التدوير كلياً. لقد سئم هذه الأفلاك البغيضة والمزعجة؛ لقد أصبح مبدأ الحركة المثالية كابوساً سماويا. فرضيته الأخيرة هي أن المريخ يسير في مدار بيضاوي والشمس في أحد بؤرتيه وقد نجحت.

وهكذا اكتشف كبلر أول قانون رياضي في علم الفلك - بعد التحرر من مبدأ الحركة المثالية للكواكب وأصبح من السهولة رفض خرافة الحركة المنتظمة أيضاً. عقارب ساعتنا السماوية تدور بسرعة متغيرة. حسابات تايخوبراهي تعطينا الكثير من الأدلة. في الحقيقة، اليونانيون كانوا يعلمون أن سرعة الأرض تزداد عندما تقترب من الشمس، ولكن اكتشاف القانون يتطلب بصيرة عبقري. انظر شكل (١-٢٦).

اكتشف كبلر أيضا أن المريخ يتباطأ عندما يبتعد عن الشمس ويسرع عندما يقترب منها. لقد اكتشف القانون الذي يطابق الحقائق فيما بعد. المريخ يسير في مداره بحيث يمسح متجه نصف القطر SM مساحات متساوية في أزمنة متساوية.



شكل (١-٢٦)

بالقياس، عمم كبلر قانونيه لحركة المريخ إلى الكواكب الأخرى. المعلومات المتوافرة لديه انسجمت مع التعميم.

بعد سنوات اكتشف قانونا ثالثا. نذكر أن الكواكب حسب بعدها عن الشمس هي عطارد (أقربها)، الزهرة، الأرض، المريخ، المشتري، وزحل (أبعدها) ومن الحقائق المعروفة أنه كلما بعد الكوكب عن الشمس، احتاج لوقت أطول لإكمال دورته حول الشمس. اعتقد كبلر في البداية أن سنة الكوكب T تتناسب مع متوسط نصف قطر مداره حول الشمس، R. لقد وجد فيما بعد أن T تزداد بصورة أكبر من مجرد تناسب طردي؛ ضعفا R يؤدي إلى أكثر من ضعفي T. أخيرا عثر كبلر على السر: مربع T يتناسب مع مكعب R.

أعمال كبلر المنشورة خليط من الفلك والتنجيم والهندسة والدين وأشياء أخرى، لقد جلس على الحد الفاصل. ومع ذلك كانت ممتعة جدا فعلى عكس غاليليو ونيوتن لم يحاول أن يخفي آثاره. حدسياته، إخفاقاته، نجاحاته، أخطاؤه، مغالطاته وهواجسه كلها تظهر بصراحة تامة. لكن أعمال كبلر مليئة بأفكار متضاربة وكان على نيوتين أن يفصل اللب عن القشور ويبرز أهمية قوانين كبلر الثلاثة التي لم يدركها كبلر نفسه.

(١ - ٢ - ٨) كلمة للقارىء الحصيف

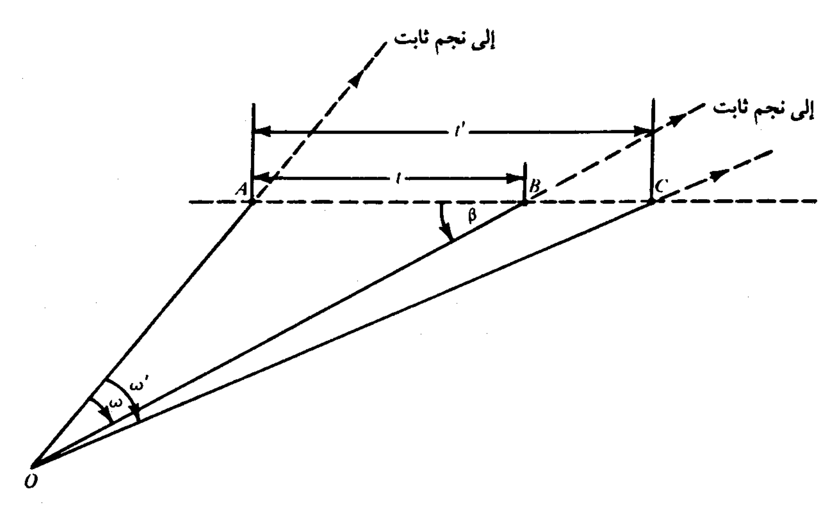
ما هي أهمية أعمال كبلر لطالب الرياضيات ودورها في العلوم؟ أولا، تطبيقات حساب المثلثات على نطاق واسع. حساب المثلثات كما رأينا جعل حساب البعد القطبي للمريخ ممكناً. حتى كبلر ماذا كان يمكن أن يفعل بدون الرياضيات؟

ثانيا، نرى دور ما يسمى بالمحاولة والخطأ والاسم الأفضل له هو التقريب المتتالي. بدأ كبلر بافتراض أن الحركة دائرية ومنتظمة وعيّن سنة المريخ T_M واستنتج أن حركة المريخ ليست دائرية ولا منتظمة وإنما بيضاوية ومتغيرة.

أليس في هذا تنـاقض ظاهـري؟ الفرضية الأساسية وهي أن الأرض والمريخ يتحركان في دوائـر وبسـرعـة منتظمـة خطأ ولكنهـا تقريباً جيداً للحقيقة. لاحظ أن كون مسارات الأرض والمـريـخ غير دائـريـة لا يبطـل حسابنا للزمن الدوري : إن تطابق عقربي ساعتنا السماوية لا يعتمد على التغير في طوليهما وإنما على معدلي دورانيهما المنتظمين فقط. لحسن الحظ، التغير في السـرعـة الـزاويـة لعقرب الأرض أقل منه لعقرب المريخ ولذا فإن تقريبا جيدا لمدار الأرض يكفي لإثبـات أن فرضيـة مماثلة لمدار المـريـخ غير مقبـولة. إن مراقبة أدق لمدار الأرض تعطي معلومات أدق عن مدار المريخ.

(١ ـ ٢ ـ ٩) مشكلة نيوتين حول مسار مذنب

سننهي هذا الجـزء بمسألـة. حسـاب التفـاضـل والتكامل ليس ضروريا ولكن سنحتاج لحسـاب المثلثـات. بالإضـافة إلى كتاب نيوتن الهام (أسس الفلسفة الطبيعية) فقد ألف كتاباً آخـر في ما نسميـه الآن جبر المـرحلة الثانوية. ما هو الهدف الرئيسي من كتاب الجبر هذا؟ إنه مثـل كتـاب ديكـارت : لحل المسـائل الكلامية ـ ولهذا فهويتطلب من بين أمور أخرى، الفهم الكـامـل والضـروري لترجمـة المسائل من النثر إلى الرياضيات. مشكلة نيوتن ببساطة هي :



شكل (١-٢٧)

تحديد مسار مذنب يتحرك بانتظام في خط مستقيم من ثلاث مشاهدات. شكل (١-٢٧) يوضح المشكلة. نيوتن كان يعلم أن المذنب لا يتحرك بانتظام ولا في خط مستقيم. ما هو مسار المذنب؟ مساره بيضاوي. ولكن الخط المستقيم تقريب أولي. هذه هي الخطوة الأولى في التقريب المتتالي. ما الذي يمكن مشاهدته؟ O ترمز للمشاهد. O يشاهد المذنب عند B,A وC ويلاحظ في كل مكان النجم الذي ينطبق مع المذنب أو قريب منه. الزوايا المحددة عند O بهذه النجوم الثابتة يمكن قياسها ولتكن ω و ω'. كذلك O يراقب عندما يكون المذنب عند B,A وC ولذا فالأوقات t ، t' التي يستغرقها المذنب لاجتياز AB وAC معلومة. باختصار المعطيات هي ω ، ω' ، t ، t' وأن حركة المذنب منتظمة، والمطلوب منا تحديد اتجاه ABC. أفضل طريقة هي إيجاد β . نختتم بملاحظة: لإيجاد β يجب البحث عن دالة مثلثية للزاوية β - أفضل دالة هي دالة ظل التمام.

الجزء الثالث: التقريب المتتالي *(Successive Approximation)*

نبدأ بتكرار نقطة هامة. بدأ كبلر بافتراض أن الأرض والمريخ يدوران حول الشمس بحركة دائرية منتظمة وتوصل أخيراً إلى أن المريخ لا يتحرك في دائرة وليست الحركة منتظمة وكذلك الشمس ليست في مركز مداره. لغير الخبير هذه الحجة قد تبدو واهية ولكن العلماء كثيرا ما يستخدمون هذا الأسلوب: من الفرضية الأولية نصل إلى النتيجة وهي نفي الفرضية، هذا الأسلوب يُدعى طريقة الافتراض الخاطىء. من بداية خاطئة نصل إلى نهاية صحيحة: نبدأ بما هو صحيح تقريبا ونصل بعد تقليص متكرر للخطأ إلى نتيجة صحيحة أو إلى تقريب أفضل من الذي بدأنا به.

يمكن توضيح الطريقة بالأسلوب الذي نبحث به عن كلمة في القاموس. لنفرض أننا نفتش عن الكلمة *Confiance* في قاموس فرنسي. نفتح القاموس حيث نتوقع الكلمة. إذا لم

تحو الصفحة كلمات تبدأ بالحرف C فإن تقديرنا خاطىء. لقد بدأنا بداية خاطئة. ولكن التقدير الخاطىء يمكن أن يمثل خطوة إلى تقدير أفضل. لنفرض أن تقديرنا الأول أعطى صفحة بها كلمات تبدأ بالحرف B ؛ نتوقع الآن أننا نحتاج إلى قلب خمس أو ست صفحات. نفعل هذا ونجد مثلا كلمات تبدأ بالحرفين CA. لقد توصلنا إلى وضع أفضل. لكننا نريد C متبوعة بـ O وليس A ؛ لقد وجدنا الكلمة صحيحة إلى الحرف الأول وليس الثاني. إذا أعطانا تقديرنا الثاني ...CO نكون قد حصلنا على الكلمة صحيحة لحرفين على الأقل: إذا وجدنا CL نقلب إلى الأمام؛ وإذا وجدنا CZ نقلب إلى الوراء. طبعاً أنت تعرف كيف تستعمل القاموس ولكن هل علمت أنه باستعمالنا له فإننا نستخدم طريقة الافتراض الخاطىء أو بالأحرى التقريب المتتالي؟ أليست الفكرة العامة هنا مثل حساب الجذر التربيعي للخانة الأولى ثم الثانية ثم الثالثة ثم الرابعة. . . من الخانات العشرية؟.

الفهم الكامل لطريقة رياضية لا يمكن أن يحدث بمجرد الحديث عنها وإنما عن طريق استعمالها بذكاء. لذا دعونا نطبق الطريقة ونرى الفكرة عمليا.

(١ ـ ٣ ـ ١) التطبيق الأول

خذ هذه المسألة والتي تناسب تلميذا في الثامنة من عمره. إذا كان ثمن الرغيف ربع دولار (٢٥ سنتا) ونصف رغيف، فما ثمن الرغيف؟ هل تستطيع حلها عقليا؟ حاول. اجعل ثمن الرغيف x سنتا، إذن

$$x = 25 + \frac{x}{2}$$

ومنه

$$x = 50.$$

الرغيف يكلف نصف دولار.

ولكن هنـاك طريقـة أخـرى توضح بصورة أفضل ما نريد قوله هنا . لكي نتفادى الالتزام بمسألتنـا السـابقـة ، نعمم ونأخـذ a سنتـاً بدلا من ٢٥ سنتـاً . هذا تحسن عظيم يمكننـا من التعامل مع مجموعة كاملة من المسائل . المسألة الآن هي إيجاد x إذا كانت

$$x = a + \frac{x}{2}. \qquad (١)$$

واضـح أن الجـواب هو $x = 2a$ ولكن شخصـاً بعقلية عمليـة قد يعالج المشكلة بالطريقة التالية المعقدة والبارعة : $x/2$ أصغر من x ولذا نتجاهله ويكون تقريبنا الابتدائي x_0 حيث

$$x_0 = a. \qquad (٢)$$

طبعا هذا التقريب صغير ولكنه المحاولة الأولى . بالتأكيد نستطيع الحصول على نتيجة أفضل . ماذا يحدث إذا عوضنا (٢) في الطرف الأيمن من (١)؟ تقريبنا الجديد x_1 هو

$$x_1 = a + \frac{x_0}{2} = a + \frac{a}{2}$$

هذا أفضل ، دعونا نكرر العملية ونأخذ التقريب الثاني x_2 حيث

$$x_2 = a + \frac{\text{التقريب السابق}}{2}$$

أي

$$x_2 = a + \frac{x_1}{2} = a + \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) = a + \frac{a}{2} + \frac{a}{4}.$$

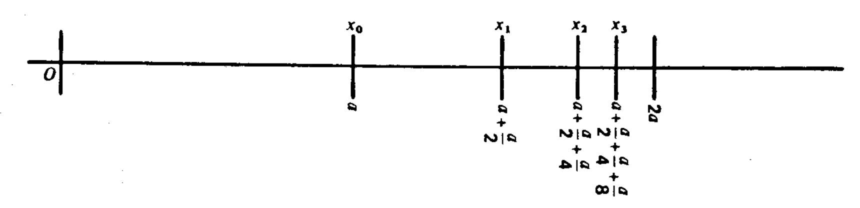
وهذا أفضل أيضا . لا شيء ينجح مثل النجاح نفسه . ما هي x_3 ؟

$$x_3 = a + \frac{x_2}{2} = a + \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2} + \frac{a}{4}\right) = a + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8}.$$

تحقق من أن

$$x_4 = a + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8} + \frac{a}{16}.$$

نستطيـع تكـرار العمليـة مرارا ومرارا . مع أننا لا نصل إلى القيمة الحقيقية أبدا ، إلا أننا نقـترب منهـا أكثـر فأكثـر. نستطيع التأكد من هذا على النحو التالي : خذ خط الأعداد حيث الأعداد تظهر كمسافات ، أي أن a تمثل الاحداثي السيني . انظر الشكل (١ـ٢٨) .



شكل (١ـ٢٨)

لاحـظ أن $x_0 = a$ في منتصف المسـافـة بين O و$2a$ وكذلك $x_1 = a + \frac{a}{2}$ في منتصف المسـافـة بين x_0 و$2a$. كذلـك x_2 منتصف المسافة بين x_1 و$2a$ وx_3 منتصف المسافة بين x_0 و$2a$. بمعنى آخر نحصـل على x_2 بإضـافة نصف الفرق بين x_1 و $2a$ ونحصل على x_2 بإضافة نصف الفرق بين x_1 و $2a$ وهلم جرا . ونحصل على التقريب النوني x_n بأن نأخـذ نصف الفـرق السـابق (أي الفـرق بين x_{n-1} و$2a$) . بما أننـا نأخذ نصفاً ونترك النصف الآخـر فإننـا لا نصـل أبـدا إلى الحـل الدقيق للمشكلة (١) . ومع ذلك فإننا نحصل على تقريب أفضل من سابقه مع كل خطوة. لاحظ أن x_1 أقل من $2a$ بمقدار $\frac{a}{2}$ و x_2 أقل من $2a$ بمقدار $\frac{a}{4}$ و x_3 أقل بمقدار $\frac{a}{8}$ و x_4 أقل بمقدار $\frac{a}{16}$. ولكن هذه المقامات $2,4,8,16,...$ قوى للعدد 2 . يمكن كتابة ما سبق في الصورة التالية :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a + \frac{a}{2} = 2a - \frac{a}{2} && = 2a - \frac{a}{2} \\
x_2 &= a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} = 2a - \frac{a}{2^2} && = 2a - \frac{a}{2^2} \\
x_3 &= a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} && = 2a - \frac{a}{2^3} \\
x_4 &= a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \frac{a}{2^4} && = 2a - \frac{a}{2^4} .
\end{aligned}
$$

نستنتج أن

$$x_n = a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \ldots + \frac{a}{2^n} = 2a - \frac{a}{2^n} . \qquad (٣)$$

الجبر يؤكد الهندسة.

هذه النتيجة تدعو إلى التعميم. ما هو النموذج الذي يظهر في السلسلة x_n ؟ كل حد (ما عدا الأول بالطبع) يساوي نصف الذي قبله. ولكن السلسلة ستعطي نفس النموذج لو كانت نسبة الحد الذي قبله $\frac{1}{3}$ أو $\frac{4}{5}$ أو $\frac{11}{9}$ بدلا من $\frac{1}{2}$.

نعمم ونجعل نسبة أي حد للذي يسبقه r . الحد الأول a ، ما هو الثاني؟ إنه ar^1 والحد الثالث ar^2 . ما هو الحد النوني؟ يوجد $n-1$ من الحدود بعد الأول ومع كل حد جديد نضرب في العامل r ولذا فإن الحد النوني هو ar^{n-1} . اجعل S_n مجموع n من الحدود، إذن

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}. \qquad (٤)$$

أي سلسلة من هذا النوع ـ حيث النسبة بين أي حد وسابقه ثابتة ـ تسمى سلسلة هندسية.

حيث إن أي حد ينتج من ضرب سابقه في r ، نجد أنه إذا ضربنا كلا من الحدود الأولى حتى الحد النوني في r ، فإننا نحصل على السلسلة المكونة من n من الحدود والتي تبدأ بالحد الثاني وتنتهي بالحد ذي الرقم $n + 1$. نحصل على

$$S_n = a + (ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1})$$
$$r \cdot S_n = (ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}) + ar^n.$$

بالطرح

$$(1 - r) \cdot S_n = a + (0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + 0) - ar^n,$$

ومنه

$$S_n = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}. \qquad (٥)$$

هل تتفق (٥) مع (٣)؟ إذا جعلنا $r = \frac{1}{2}$ في (٤)، نجد:

$$S_n = a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \ldots + \frac{a}{2^{n-1}}.$$

بمقارنة هذا مع (٣) نلاحظ وجود حد إضافي في x_n . لكي نطبق (٤) و(٥) يجب كتابة $n+1$ بدلا من n . إذا فعلنا هذا في (٤) و(٥) (حيث $r = \frac{1}{2}$ طبعا) وبمساواة الاثنين نجد

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \ldots + \frac{a}{2^{n-1}} + \frac{a}{2^n} = a \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{a}{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2a\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= 2a - \frac{a}{2^n}. \end{aligned}$$

إذن (٥) تطابق (٣). إن حل مشكلتنا الصغيرة حول ثمن الرغيف بطريقة التقريب المتتالي قد قادنا إلى اكتشاف قانون مجموع السلسلة الهندسية.

(١ ـ ٣ ـ ٢) إيجاد الجذور التربيعية

لنفحص مثالا آخر على التقريب المتتالي: ربما أنك تتذكر $\sqrt{2}$ إلى عدد من الخانات العشرية وربما أنك تعلمت الطريقة المعتادة لإيجاد الجذر التربيعي بصورة عامة. إنك تعرف

ماذا أقصد: نبدأ عند العلامة العشرية ونجمع الأرقام مثنى مثنى قبل وبعد العلامة، ثم نطرح أكبر مربع كامل من الطرف الأيسر و. . . الخ. طبعا تستطيع استعمال هذه الطريقة إذا رغبت ـ لقد فرضت على قبل سبعين سنة. إنني لم أفهمها ولذا كرهتها ولا أزال. يمكنك استعمال أسلوب آخر مشوق لأنه مفهوم وأكثر فائدة ولأنه يمكن تعميمه. إنه أبطأ من الطريقة المعتادة ولكنه أسرع باستعمال الحاسبة. علينا أن نختار بين حسابات سريعة أو طريقة تؤدي إلى نتيجة.

لكي نتفادى التكرار، سوف نحيل القارىء إلى طريقة «اقسم وخذ المعدل».

لإيجاد الجذور التربيعية، راجع الكتب التالية:

1) High School Mathematics, Unit 3, pp. 121-130, University of Illinois Press, Urbana, 1960.

2) First Course in Algebra, pp. 304-307, Yale University Press, New Haven, 1960.

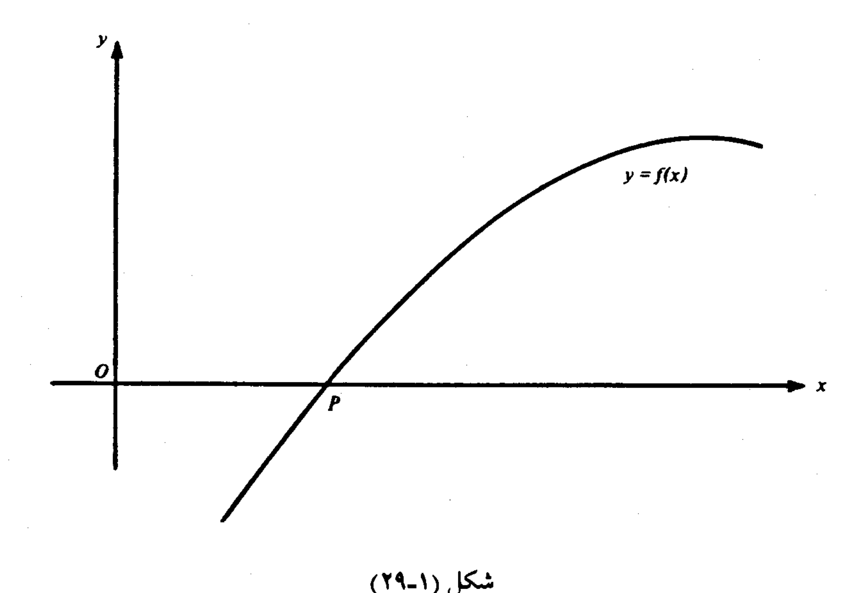
الجزء الرابع: طريقة نيوتن في التقريب المتتالي

التقريب المتتالي أسلوب رياضي هام، إنه أصل وأساس العلوم. مع أننا نضطر بالبدء بتقريب للحقيقة إلا أننا لا نرضى بها. التقريب الأولي البسيط يمكن أن يقود إلى تقريب أفضل. إن مفهوم التقريب المتتالي هو المفتاح إلى المعرفة الدقيقة ولذا فإنه يستحق الدراسة والاهتمام.

(١ ـ ٤ ـ ١) طريقة نيوتن العامة

لقد ابتدع نيوتن طريقة عامة لإيجاد جذور معادلة مثل $f(x) = 0$. لكي نأخذ فكرة

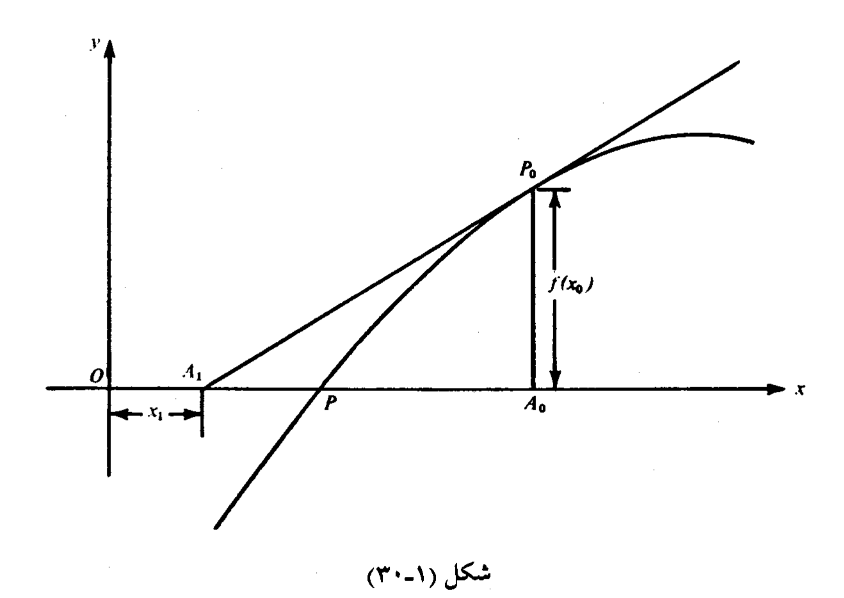
عامة، نرسم الدالة $y = f(x)$. لنفرض أن الدالة كما في الشكل (١-٢٩). لاحظ أن y تأخذ القيمة صفر عند P. بمعنى آخر الاحداثي السيني للنقطة P جذر للمعادلة. المشكلة هي كيفية الحصول على تقريبات أفضل لهذا الاحداثي. يكفي طبعا معالجة جذر واحد حيث يمكن معالجة الجذور الأخرى بنفس الأسلوب.



شكل (١-٢٩)

نبدأ من الشكل ونخمن الجذر x_0 . هل x_0 جذر بالفعل؟ هذا ممكن ولكنه بعيد الاحتمال. دعونا نجربه. بالتعويض نجد أن $f(x_0) \neq 0$. إذن x_0 تقريب فقط. ماذا نفعل الآن؟

نتبع نيوتن ونعمل شيئا بسيطاً وفعّالا. عند P_0 حيث الاحداثيات x_0 و $f(x_0)$ ، نرسم المماس للمنحنى. لنفرض أن هذا المماس يتقاطع مع المحور السيني عند النقطة A_1 باحداثي سيني x_1 . واضح أن التقريب x_1 أفضل من التقريب الأول x_0 . انظر الشكل (١-٣٠).



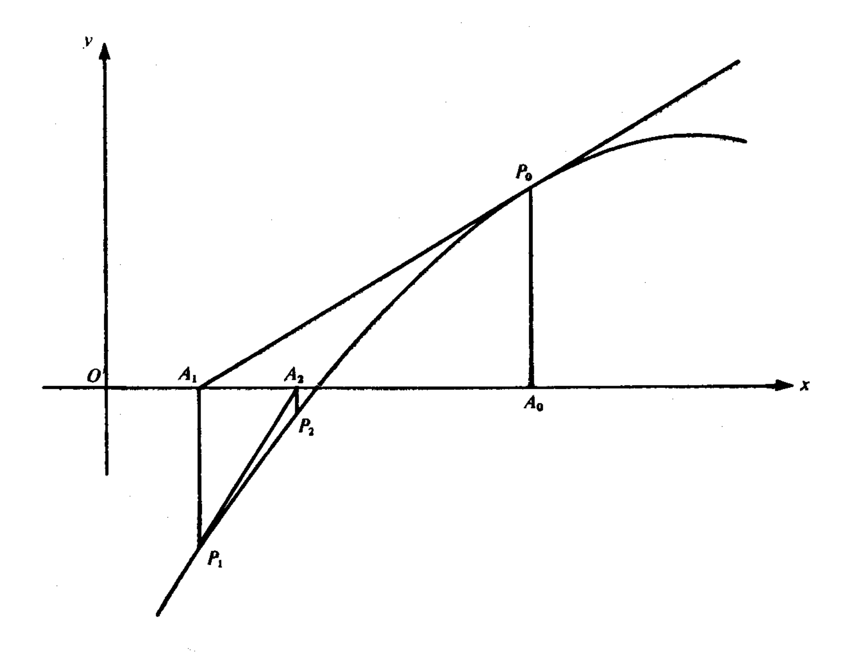
شكل (١-٣٠)

نأخذ الآن النقطة P_1 على المنحنى باحداثي سيني x_1 ، ونرسم مماسا للمنحنى يقطع محور السينات في النقطة A_2 التي احداثيها السيني x_2 . نكرر الطريقة. عند النقطة P_2 على المنحنى والتي احداثيها السيني x_2 ، نرسم مماسا يقطع محور السينات في A_3 احداثيها x_3 . يتضح لنا الآن أن المتوالية A_0، A_1، A_2، A_3 تقترب من النقطة P. إذن x_0 ، x_1 ، x_2 ، x_3 تقترب من الجذر المطلوب، انظر الشكل (١-٣١). واضح أنه يمكن تكرار الطريقة من حيث المبدأ للحصول على أي دقة مطلوبة ولكن عملياً هناك حد لإمكانية تكرار الطريقة. إن سماكة المماس المرسوم بالقلم تحبط أي محاولة للحصول على دقة أكثر. إن الرسم الهندسي يوضح الطريقة ولكن للتطبيق المتكرر نحتاج إلى قانون.

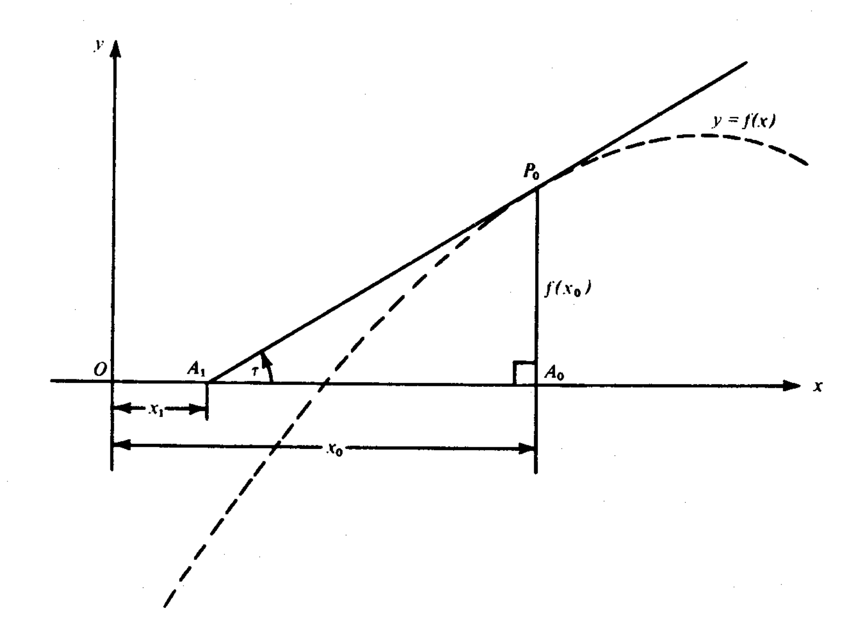
(١ - ٤ - ٢) قانون نيوتن

في المثلث $A_0A_1P_0$ (انظر شكل ١-٣٢).

$$\tan \tau = \frac{\text{الزيادة الرأسية}}{\text{الزيادة الأفقية}} = \frac{A_0P_0}{A_1A_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}. \quad (١)$$



شكل (١-٣١)



شكل (١-٣٢)

وهنا يمكن الاستفادة من حساب التفاضل، حيث إن $\tan \tau$ ميل المماس عند النقطة P_0 . لاحظ أن ميل المنحنى عند النقطة $P_0(x_0 , f(x_0))$ يساوي المشتقة $f'(x)$ عند x_0 .

إذن

$$\tan \tau = f'(x_0). \qquad (٢)$$

من (١) و(٢)

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

أي

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - x_1,$$

ومنه نستنتج

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

إذا أعطينا x_0 ، فإن هذا القانون يمكننا من حساب x_1 . ولكن فعالية طريقة نيوتن تكمن في إمكانية تعميمه، حيث يمكن حساب x_2 من x_1 و x_3 من x_2 بنفس الطريقة. ويصبح لدينا:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)},$$

وبشكل عام

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

مع أن هناك الكثير من الدلائل الحدسية على أن قانون نيوتن يعطي تقريبات أفضل وأفضل، إلا أنه من الحكمة اختباره. إن الحذر من الشيء غير المجرب، والتردد في قبول الشيء غير المبرهن هو الركيزة الأولى في الأسلوب العلمي. لذا دعونا نجرب قانون نيوتن.

(١ - ٤ - ٣) $\sqrt{a}$

لنفرض أننا نريد حساب $\sqrt{a}$ ، الجذر الموجب للمعادلة

$$f(x) = x^2 - a = 0.$$

هنا

$$f'(x) = 2x,$$

وبعد تطبيق قانون نيوتن نحصل على الطرف الأيمن من المعادلة المطلوبة

$$x - \frac{x^2 - a}{2x}.$$

بوضع الأدلة السفلية نحصل على المعادلة

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}.$$

إذن

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}$$
$$= \frac{x_n + a/x_n}{2}.$$

ولكن

$$x_n \cdot \frac{a}{x_n} = a,$$

فإذا كانت x_n تقديراً أكبر من $\sqrt{a}$ فإن $\frac{a}{x_n}$ أقل والعكس صحيح. هذه الملاحظات منسجمة مع كون x_{n+1} تقريب أفضل للجذر $\sqrt{a}$ من x_n حيث إن x_{n+1} متوسط x_n و $\frac{a}{x_n}$ ولكن هذا لا يثبت شيئا. لنفرض أننا نريد حساب $\sqrt{2}$ وأن تخميننا الأول هو $x_0 = 2$

إذن

$$\frac{a}{x_n} = \frac{a}{x_0} = \frac{2}{2} = 1$$ ومنه

$$x_1 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

كذلك

$$\frac{a}{x_1} = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3},$$

و

$$x_2 = \frac{3/2 + 4/3}{2} = \frac{17}{12}.$$

إذن

$$\frac{a}{x_2} = \frac{2}{17/12} = \frac{24}{17},$$

و

$$x_3 = \frac{17/12 + 24/17}{2} = \frac{577}{408}.$$

إذن تقريباتنا المتتالية هي

$$2, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{577}{408},$$

ومربعاتها هي

$$2+2, \quad 2+\frac{1}{2^2}, \quad 2+\frac{1}{12^2}, \quad 2+\frac{1}{408^2}.$$

ونترك الحقائق تتكلم عن نفسها.

(١ - ٤ - ٤) $\sqrt[3]{a}$

دعونا نجرب قانون نيوتن مرة أخرى، نريد الآن إيجاد الجذر التكعيبي للعدد a ، الجذر الحقيقي للمعادلة

$$f(x) = x^3 - a.$$

هنا

$$f'(x) = 3x^2$$

ولذا فإن

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x^2}.$$

إذن

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{3} + \frac{a}{3x_n^2}$$

$$= \frac{2x_n}{3} + \frac{a}{3x_n^2}$$

$$= \frac{2x_n + a/x_n^2}{3}.$$

والآن نفحص مثالا عدديا مثل $\sqrt[3]{26}$ ، أي الجذر الحقيقي للمعادلة

$$f(x) = x^3 - 26.$$

واضح أن *3* تقريب أفضل من *4,2,1* أو*5* ولذا نبدأ بـ 3 $x_0 = 3$.

إذن $\frac{26}{9} = \frac{a}{x_0^2}$

وحيث إن

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 > 26,$$

3 أكبر من $\sqrt[3]{26}$ ولكن

$$\frac{26}{9} \cdot (3 \cdot 3) = 26 = \sqrt[3]{26} \cdot (\sqrt[3]{26} \cdot \sqrt[3]{26}).$$

إذن $\frac{26}{9}$ أقل من $\sqrt[3]{26}$. ولكن $\frac{26}{9} = 2\frac{8}{9}$ ولذا فالجذر $\sqrt[3]{26}$ محصور بين $2\frac{8}{9}$ و*3*.

كذلك لو أخذنا $x_0 = 5$ فإن $a/x_0^2 = \frac{26}{25}$ ويكون $\sqrt[3]{26}$ بين $1\frac{1}{25}$ و5وبمجال واسع. ومن هنا تظهر فائدة التخمين الأول للتقريب.

نعود الآن إلى حساباتنا مع $x_0 = 3$ ، ونجد أن

$$x_1 = \frac{2x_0 + a/x_0^2}{3} = \frac{2 \times 3 + 26/9}{3} = \frac{80}{27}$$

أي أن

$$\frac{a}{x_1^2} = \frac{26}{(80/27)^2}.$$

لكن

$$\frac{26}{(80/27)^2} \cdot \left(\frac{80}{27} \cdot \frac{80}{27} \right) = 26 = \sqrt[3]{26} \cdot (\sqrt[3]{26} \cdot \sqrt[3]{26}),$$

ولـذا، إذا كان التقـديـر $\frac{80}{27}$ أكبر من $\sqrt[3]{26}$ فإن $\frac{26}{(80/27)^2}$ أصغر والعكس صحيح. لكن

$$x_1 = \frac{80}{27} = 2.962\ldots,$$

$$\frac{a}{x_1^2} = 26/(80/27)^2 = 2.961\ldots,$$

إذن $\sqrt[3]{26}$ محصور بين 2.962 و2.961 ولذا فهو 2.96 مقرب إلى خانتين عشريتين.

إذا استمرينا في الحساب نجد أن

$$x_2 = \frac{2x_1 + a/x_1^2}{3} = \frac{2 \times 80/27 + 26/(80/27)^2}{3}.$$

ونـترك للقـارىء التحقق من أن $\sqrt[3]{26}$ يقـع بين x_2 و $\frac{a}{x_2^2}$, وكـذلـك حسـاب قيمة الجذر من قيمتيهما العشريتين.

(١ - ٤ - ٥) $\sqrt[5]{a}$

مع أنـه يوجـد قانـون جبري لحل المعـادلـة من الـدرجـة الثـانيـة وقـوانـين معقـدة جدا للمعـادلات من الـدرجـة الثـالثـة والـرابعة، إلا أنه من المستحيل الحصول على قوانين مماثلة للمعادلة من الدرجة الخامسة أو أكثر. لحل المسائل العملية يتحتم علينا استعمال التقريب المتتالي:

لندرس مثالا أخيرا مثل $\sqrt[5]{a}$ ، أي حل المعادلة

$$f(x) = x^5 - a = 0.$$

هنا

$$f'(x) = 5x^4,$$

ومنه

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - a}{5x_n^4}.$$

إذن

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{5} + \frac{a}{5x_n^4}$$

$$= \frac{4x_n}{5} + \frac{a}{5x_n^4}$$

$$= \frac{4x_n + a/x_n^4}{5}.$$

كلنا نخطىء ولا أحد معصوم من الخطأ. مع أننا لا نستطيع تفادي الأخطاء إلا أننا نستطيع مراجعة الأخطاء وتصحيحها. هل قوانيننا لـ x_{n+1} الخاصة بالجذور $\sqrt[2]{a}$ ، $\sqrt[3]{a}$ ، $\sqrt[5]{a}$ تعطي أي نمط معين؟

الجواب نعم والنمط المطلوب هو:

$$x_{n+1} = \frac{(q-1)x_n + a/x_n^{q-1}}{q}.$$

ألا يزيد هذا من ثقتنا في ما عملنا؟

نتابع الآن كما في المرات السابقة، ونحصل على

$$\frac{a}{x_n^4} \cdot (x_n \cdot x_n \cdot x_n \cdot x_n) = a = \sqrt[5]{a} \cdot (\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a}).$$

من هذا يتضح أنه إذا كانت x_n أكبر من $\sqrt[5]{a}$ فإن $\frac{a}{x_n^4}$ أصغر من $\sqrt[5]{a}$ والعكس صحيح. إذن $\sqrt[5]{a}$ يقع بين x_n و $\frac{x}{x_n^4}$. وبالمثل إذا كانت $x_{n+1} \neq \sqrt[5]{a}$ فإن الجذر يقع بين x_{n+1} و $\frac{a}{x_{n+1}^4}$.

لنفرض أن $x_n > \frac{a}{x_n^4}$; ومنه نجد

$$4x_n + x_n > 4x_n + a/x_n^4,$$

أي أن

$$\frac{5x_n}{5} > \frac{4x_n + a/x_n^4}{5};$$

أو

$$x_n > x_{n+1}. \qquad (١)$$

وبما أن

$$\frac{a}{x_n^4} < x_n,$$

$$4\frac{a}{x_n^4} + \frac{a}{x_n^4} < 4x_n + \frac{a}{x_n^4},$$

ومنه نجد أن

$$\frac{a}{x_n^4} < x_{n+1}. \qquad (٢)$$

من (١) و(٢) نبرهن أن x_{n+1} يقع بين x_n و $\frac{a}{x_n^4}$.

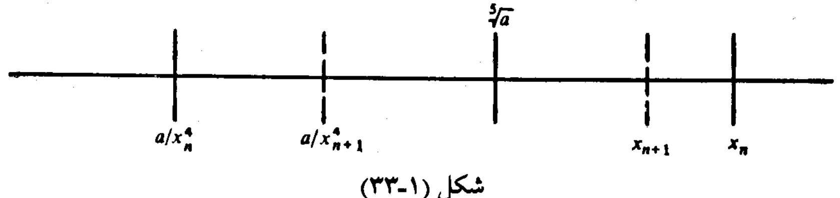
كذلك من (١)

$$\frac{1}{x_{n+1}} > \frac{1}{x_n},$$

$$\frac{1}{x_{n+1}^4} > \frac{1}{x_n^4},$$

$$\frac{a}{x_{n+1}^4} > \frac{a}{x_n^4}. \qquad (٣)$$

ماذا يمكن استنتاجه مما سبق؟ إذا كان x_{n+1} تقريباً من أعلى فإن الشكل (١-٣٣) يوضح الموقف. بما أن $\sqrt[5]{a}$ يقع داخل الفترة الداخلية، فإن x_{n+1} تقريب علوي أفضل من x_n و $\frac{a}{x_{n+1}^4}$ تقريب سفلي أفضل من $\frac{a}{x_n^4}$. وهكذا نحصر $\sqrt[5]{a}$ للحصول على دقة أكبر.



شكل (١-٣٣)



الفصل الثاني

من تاريخ الاستاتيكا

الميكانيكا هي دراسة تأثير القوى على الأجسام. الجزء الذي يعنى بدراسة القوى المتزنة يسمى الاستاتيكا بعكس الجزء الآخر الديناميكا حيث القوى غير متزنة والأجسام ليست في حالة سكون. هنا سنعنى بالاستاتيكا حيث إنها أسهل وطورت قبل الديناميكا. سنقدم الموضوع عن طريق أعمال ستيفينوس وارخميدس. بالرغم من أن الإنجازات الحقيقية الأولى تعود إلى ارخميدس وسبقت إنجازات ستيفينوس بعدة قرون، إلا أنني أفضل أن أبدأ بالأخير.

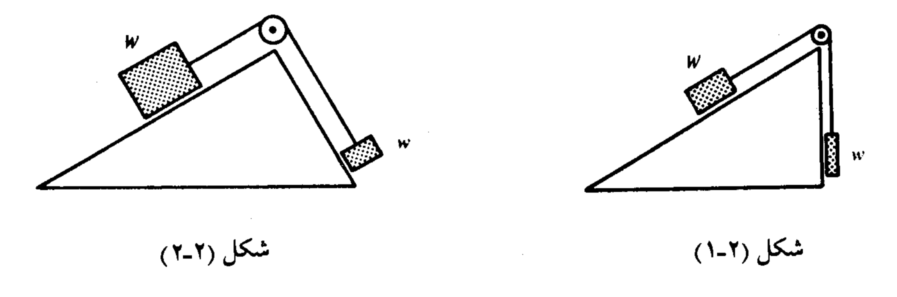
الجزء الأول: ستيفينوس وأرخميدس

ستيفينوس *(Stevinus)* رجل هولندي عاش في القرن السادس عشر وعاصر ديكارت، أي أنه عاش قبل نيوتن وليبنتز واكتشاف التفاضل والتكامل بحوالي قرن واحد. لقد فتن هذا الرياضي البارع بتطبيقات الرياضيات. بالنسبة له، الرياضيات الجيدة هي التي يمكن الاستفادة منها في مجال ما. لقد كان من أول مستعملي الكسور العشرية وأثبت فائدتها في حياتنا العملية واخترع أول عربة بدون حصان وكذلك شيد السدود التي لا تزال موجودة. لقد خلدت أعماله بتمثال أقيم له في مسقط رأسه «بروغ». إنْ حدث وذهبت إلى هناك فابحث عنه. الآن سنرى كيف استنتج قانون المستوى المائل.

(٢ - ١ - ١) المستوى المائل

حتى تجربتنا الحياتية اليومية العادية تطرح للشخص الفضولي الكثير من التساؤلات. وتظهر هذه التساؤلات جلية كلما كانت التجربة بسيطة. بغض النظر عن اهتمامنا بالموضوع، كلنا نعلم أن دفع جسم إلى أعلى على سطح شديد الانحدار أصعب من دفعه على سطح أقل انحداراً. كلما زاد الانحدار احتجنا إلى قوة دفع أكبر. السطح المائل يمكننا من دفع صندوق ثقيل لا نستطيع حمله إلى داخل السيارة. استعمال العقل يقلل من اعتمادنا على القوة العضلية: ميزة هذه الآلة البسيطة هي أن السطح المائل يتحمل جزءاً من الوزن. قد يتساءل المرء: بما أن الدفع إلى أعلى أسهل من الرفع، كيف وفرنا الجهد؟ لقد أثار الموضوع فضول ستيفينوس.

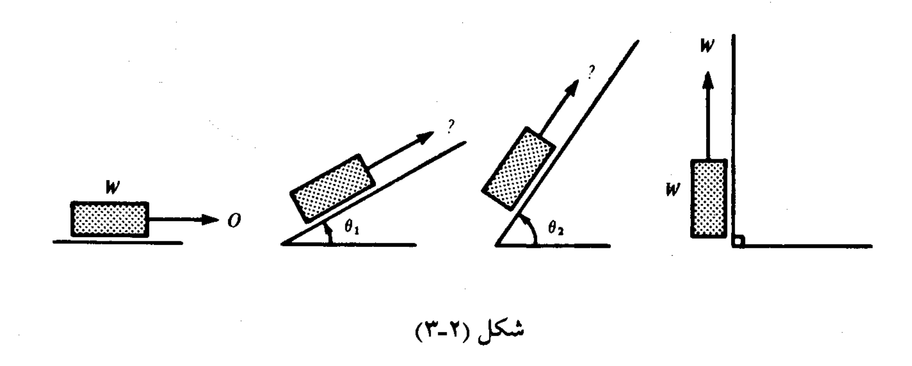
بعد التدبر والتفكير، استطاع ستيفينوس من صياغة السؤال على النحو التالي: كيف يمكن مقارنة قوة السحب على المائل بالقوة الضرورية لسحبه إلى أعلى مباشرة؟ انظر الشكل (٢-١). بما أن قوة الشد في الخيط w تعادل القوة إلى أسفل المستوى المائل، إذن نسبة السحب إلى قوة الرفع المباشر تساوي $w:W$. لكن المستوى الرأسي حالة خاصة من المستوى المائل ولذا فإن الحالة العامة هنا موضحه في الشكل (٢-٢) ويصبح السؤال إذا افترضنا التوازن: ما هي نسبة w إلى W؟



شكل (٢-٢) شكل (٢-١)

تجربتنا اليومية العادية البسيطة تكفي للبدء بالإجابة. نعرف أنه إذا زاد الانحدار زاد السحب. إذا كانت زاوية الميل صفرا، فإننا لا نحتاج قوة أفقية لإبقاء W في حالة اتزان؛ إذا

كانت زاوية الميل ٩٠° فإننا نحتاج قوة رأسية مقدارها W. خذ الحالات التي يزداد فيها الميل كما في الشكل (٢-٣). طبعا في حالة الزوايا المتوسطة نحتاج إلى قوى متوسطة. لو كانت W وw متساويتين لسحب الجسم الذي على يمين الشكل (٢-٢) بقوة أكبر وانزلق إلى أسفل. لذا نستنتج أنه في حالة التوازن $W > w$. هذا صحيح ولكن ما هو الفرق بينهما؟.



شكل (٢-٣)

سنؤجل هذا السؤال ونفحص بعض الأمور الهامة المتعلقة بما سبق ذكره. أولا، إن تغيير البيانات أمر مهم في حل أية مشكلة. بواسطة هذا الأسلوب توصلنا إلى الحقيقة القائلة أن القوة الضرورية لإبقاء الجسم في حالة توازن على سطح مائل تعتمد على درجة انحدار المائل.

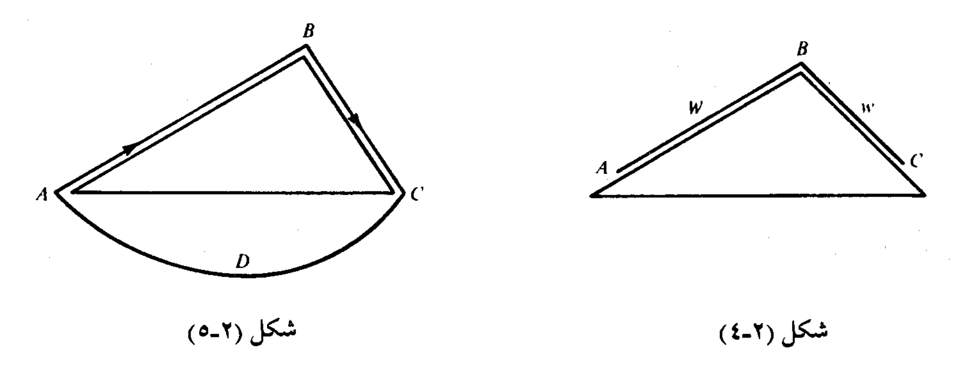
ثانيا، إن العديد من الفرضيات الضمنية تظهر جلية بعد إعادة النظر فيما سبق، كلنا نعلم أننا لو توقفنا قليلا لنأخذ نفسنا عند دفع صندوق ثقيل على مستوى مائل إلى وسط السيارة فإن الصندوق قد لا ينزلق إلى أسفل المائل. الاحتكاك قد يمنع الانزلاق عندما نتوقف عن الدفع. لم نقل شيئا عن الاحتكاك بعد. الآن، خذ الحالة الموضحة في الشكل (٢-١). احتمال انحناء المستوى بصورة طفيفة تحت الوزن W وارد ولكننا نتجاهل هذا. كذلك نتجاهل الاحتكاك عند البكرة ووزن الخيط وعدم تجانسه وعدم مرونته.

إن الطبيعـة معقـدة للغـاية ولكي نستطيع دراستها يتحتم علينا تبسيطها. يمكن التقليل من الاحتكـاك بجعـل السطـح المـائـل أملس وكذلك بالتزييت. وهكذا يمكن الاقتراب من الحـالـة المثـالية حيث ينعدم الاحتكاك. كذلك باستعمال خيوط دقيقة مرنة ومتجانسة وسطوح ملسـاء قويـة وبكـرات أفضـل نستطيـع التقليـل من الآثـار العارضة في الشكل (٢-١). كلما اقترب الوضع الحقيقي من الحالة المثالية استطعنا اختبار النظرية الناتجة عن نموذجنا بدقة أكبر.

ثالثا، هناك وجهة نظر الفلاسفة حول طبيعة العلوم وهي أن الفيزياء علم تجريبي. هذا صحيح ولكن لا تجعل هذا يضللك إلى الاعتقاد أن ستيفينوس بدأ في حل مشكلته بقياسات ومـلاحظـة دقيقة. هذا لم يحدث. قبل معالجة القياسات، وجب عليه أولا أن يختار القياسات التي يمكن الاستفـادة منهـا. لقـد حل مشكلتـه بالتفكير الدقيق في بعض الحقائق البسيطة. مشكلته الحقيقية كانت فكرية أكثر من أي شيء آخر. كان عليه أن يحدد الأمور التي لها صلة هامـة بالمـوضـوع والأمـور التي ليست لها أهميـة كبرى. إن هذا التخيـل والتجريد من الواقع التجريبي إلى النموذج المثالي هو المفتاح الأساسي إلى الاكتشاف. لم يكن لدى ستيفينوس أي شيء ليجربه إلا بعد أن أصبح لديه نظرية. حاجته للقياسات تأتي بعد وضعه للنظرية.

نعـود مرة أخـرى إلى السطـح المـائـل. ما هي نسبـة w إلى W عنـد التـوازن بافـتراض الظـروف المثـاليـة في الشكل (٢-٢)؟ لقد عرف ستيفينوس أنه في حالة انعدام الاحتكاك فإن التـوازن لا يعتمـد على شكـل الأجسام W وw. سواء كانت على شكل صناديق أو اسطوانية فهـذا لا يؤثـر في التـوازن. بل ويمكن استبـدال هذه الأجسـام بخيـوط وسـلاسل كما تصور ستيفينوس بنظرته الثاقبة.

خذ الشكل (٢-٤). لنفرض أن ABC سلسلة من النوع القديم. ونعني بالنوع القديم، السلسلة السميكة المتقاربة الحلقات وليست سلاسل اليوم الدقيقة ذات الحلقات المستطيلة.

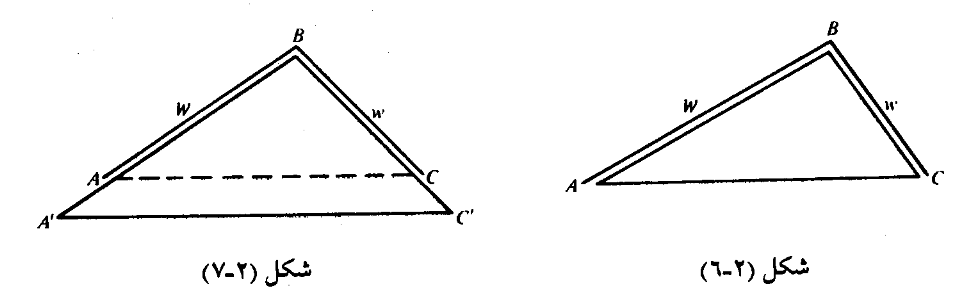


شكل (٢-٤)

شكل (٢-٥)

يمكن اعتبار هذه السلسلة كاملة المرونة وذات كثافة منتظمة. إذن الوزنان W وw على AB وBC يتناسبان مع طوليهما وتصبح نسبة W إلى w كنسبة AB إلى BC. وعلينا الآن معرفة النسبة الأخيرة. هل هذا ممكن؟ يبدو أننا أخذنا خطوة في الاتجاه الخاطىء.

لقد تصور ستيفينوس سلسلة مغلقة وهوما لا يمكن أن يتصوره إلا القليل جدا منا. انظر الشكل (٢-٥). إما أن تكون السلسلة المتجانسة المرنة المغلقة حول المنشور الثلاثي في حالة حركة أوسكون. لنفرض أنها تتحرك في اتجاه ABC. خذ نقطة على السلسلة ولتكن C. حيث إنها تتحرك إلى أسفل لابد أن يكون هناك قوة تجذبها إلى أسفل. عندما تتحرك سيحل محلها نقطة أخرى. ماذا بعد ذلك؟ السلسلة ككل تحتل نفس المكان السابق ولكن كل نقطة تتحرك قليلا. نستنتج من هذا أنه لو كان في البداية قوة تؤثر على السلسلة عند النقطة C فإن القوة تبقى حتى الآن. لذا، إذا كانت السلسلة في حالة حركة في البداية فإنها تبقى في حالة حركة دائما. ولكن الحركة الأبدية، مصدر الطاقة الدائم المجاني ما هوإلا وهم الفلاسفة. الهولنديون يعرفون جيداً أنه لا شيء يأتي من لا شيء، وستيفينوس كان هولندياً. نستطيع القول بأن السلسلة في حالة توازن. وحيث إن السلسلة بكاملها في حالة توازن فإن الجزء السفلي ADC في حالة اتزان أيضا. وبما أن السلسلة كاملة المرونة فإنه لا يوجد مقاومة للثني عند A أوC ولذا فالسلسلة تتدلى بصورة متناظرة تحت AC. إذن قوتا السحب إلى أسفل عند A وC متساويتان؛ إذن عندما نلغي الجزء السفلي ADC فإن الجزء العلوي ABC يبقى متزناً كما يتضح في الشكل (٢-٦).



شكل (٢-٧) شكل (٢-٦)

وبديهي أن اتزان السلسلة ABC لا يتأثر إذا مُدِّد المنشور الثلاثي كما في الشكل (٢-٧). كون AC حافة القاعدة للمنشور لا يهمنا وإنما المهم هو أن AC أفقي. لنفرض أن AC في الشكل (٢-٥) ليس أفقيا. بما أن AC ليس أفقيا فالجزء السفلي من السلسلة لا يتدلى بصورة متناظرة تحت AC وهكذا فالقوى السفلية عند A وC غير متساوية. إذن عندما نلغي الجزء السفلي فإن الجزء العلوي ABC غير متزن. ABC يكون متزناً إذا وإذا فقط كان AC أفقيا.

باختصار، الشكل (٢-٧) يعطي جواب السؤال حول الشكل (٢-٤). في الشكل (٢-٧)، AC موازٍ لـ $A'C'$ ومنه نستنتج أن أطوال أضلاع المثلث $A'BC'$ متناسبة مع أطوال أضلاع المثلث ABC. إذن

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BC'}{A'B}.$$

وحيث إن السلسلة ذات كثافة منتظمة نجد أن

$$\frac{BC}{AB} = \frac{w}{W}.$$

إذن

$$\frac{w}{W} = \frac{BC'}{A'B}. \qquad (1)$$

أي أن نسبة الأوزان تساوي نسبة أطوال الموائل التي تقع عليها.

لكن هذه العـلاقـة تتحقق بغض النظـر عن ميـل $A'B$ و BC' على الأفقي . من هذا نستخلص أن التوازن يتحقق حتى لو كان BC' عمودياً بشرط أن يبقى $A'C'$ أفقياً . هذا الوضع موضح في الشكل (٢ـ٨) . هنا

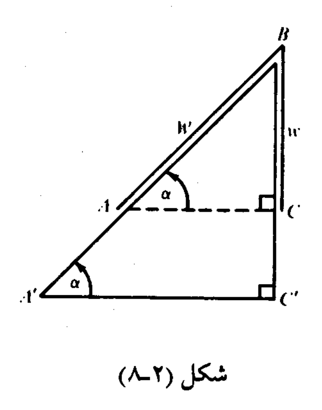
$$\frac{BC'}{A'B} = \sin \alpha.$$

ومن (١) نجد أن

$$\frac{w}{W} = \sin \alpha \qquad (٢)$$

ومنه أن

$$w = W \cdot \sin \alpha. \qquad (٣)$$



شكل (٢ـ٨)

بقي علينـا أن نشـير إلى أن قوى الشـد عنـد B وكـذلـك توازن النظـام لا يتغـير لو استبـدلنا السلسلة المتجانسة بخيط عديم الوزن معلق به الوزن W من طرفه الأيسر والوزن w من طرفه الأيمن . نصـل من هذا كله إلى أن المعـادلـة (٢) هي الجـواب للمشكلة الموضحة في الشكل (٢ـ١) وللسؤال الأساسي «كيف يمكن مقارنة قوة السحب على المائل بالقوة اللازمة لسحبه إلى أعلى مباشرة؟» .

إنـه لمن الحكمـة أن نختـبر ما توصلنـا إليه . من المعادلة (٣)، عندما تكون $\alpha = 0°$ فإن $\sin\alpha = 0$ ومنـه $w = 0$ وحينـما تكـون $\alpha = 90°$ فإن $\sin\alpha = 1$ وعليـه فإن $w = W$. إذن قانون ستيفينوس صحيح في حالة السطح الأفقي والرأسي . لقد وصلنا المرحلة التي تلي مرحلة وضع النظرية حيث نحتاج إلى قياسات دقيقة لاختبار النتائج النظرية . كان لدى ستيفينوس نظـريـة اختـبرها وكانت النتائج مرضية بالنسبة له . قد يظهر حله هذا واضحا بالنسبة لنا الآن ولكنه يتطلب في البداية الكثير من الرؤية الثاقبة والعبقرية . لا نستطيع أن نرغم أنفسنا على الإتيان بمثل هذه الأفكار النيرة .

إن مادة هذا المـوضـوع عن السطـح المائل مثل الجزء التالي عن الروافع مأخوذة من كتاب ارنست ماخ *(Ernest Mach)* ، أسـاسيـات الميكـانيكـا حيث يوجـد ترجمـة انجليـزيـة جيدة (١٨٩٣) من الأصـل الألمـاني (١٨٨٣) . بالإضـافة إلى كونه فيزيائيا قديرا خُلدت تجاربه في الصـوت بوحـدة ماخ ، فهـو يعتـبر فيلسوف العلوم الأول في عصره . قبل كتابة مجلده هذا كان عليه أن يقرأ ارخميدس في اللغة اليونانية الأصلية وغاليليو في الايطالية وستيفينوس في الهولندية وآخرين في اللاتينية . المتخصصون يقولون إن هناك بعض النقاط القليلة التي أخطأ في فهمها ولكن حين نتذكر أنه كان فيلسوفا وفيزيائيا وليس لغويا فإننا نتوقع بعض الأخطاء . بالرغم من بعض العيـوب البسيطـة إلا أن الكتـاب عمـل رائـع من قبل رجل رائع : إنه بالنسبة لي أروع كتاب قرأته حيث إنني قرأته في الوقت المناسب عندما كنت صغيراً ولكن لم أكن صغيرا جدا . إنه يتطلب القليل جدا من الرياضيات والكثير من البديهة . إنه يستحق أن يقرأ عدة مرات .

(٢ ـ ١ ـ ٢) الروافـــــــع

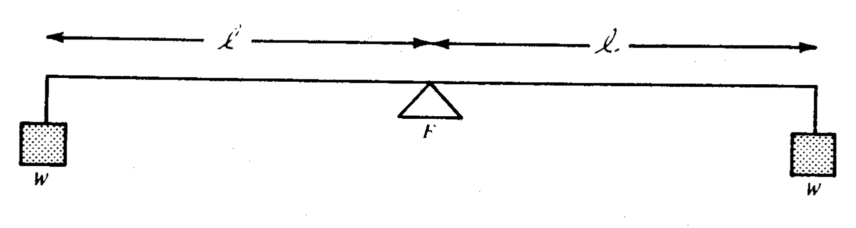
إننا أناس مخطئون . مع أن أرخميدس (٢٨٧-٢١٢ق . م) يعتبر أعظم رياضي يوناني فإننا ننسب إليـه أشيـاء لم يفعلهـا ولا ننسب إليـه أشياء عملها فعلا . إن طرقه العبقرية في حساب المساحات والحجوم قربت الرياضيات من بداية حساب التكامل ومع ذلك فإن الكتب تعطي

الشرف الكامل في اكتشاف علم التفاضل والتكامل لنيوتن وليبنتز. لقد بدأ ارخميدس علم الميكانيكا باكتشافه لشروط توازن الروافع ولكننا ندعي أنه اكتشف الروافع نفسها ـ مع أن بنائي أهرامات مصر استعملوا الروافع قبل ولادته بآلاف السنين.

هنا سأكتفي بإعطاء مقدمة عن الأفكار التي بنى عليها أرخميدس اكتشافه لشروط توازن الروافع. للحصول على معالجة كاملة لنظرية الروافع راجع كتاب ماخ.

مع أن أرخميدس لم يصرح بأن الروافع صلبة وخفيفة وأن الخيوط خفيفة ومرنة عند دراسته للأوزان المعلقة في الروافع إلا أن جميع هذه الأمور مفهومة ضمنا من طريقة معالجته. نجد هنا المثالية المحتومة. لقد كان أسلوبه رياضيا حيث بدأ بتحديد فرضياته. أولى هذه الفرضيات والتي اعتبرها بديهية هي:

بديهية (١) الأوزان المتساوية عند مسافات متساوية تكون متزنة. طبعا يفهم من هذا أن المسافات تقاس من نقطة الارتكاز وأن الأوزان على الجانبين. الشكل (٢-٩) يوضح البديهية.



شكل (٢-٩)

هناك سؤالان حول هذه البديهية. الأول: هل نصدقها؟ هل هذه هي القاعدة الصحيحة لتوازن الأوزان المتساوية؟ فكر قليلا. لا يمكن وجود قاعدة صحيحة أوغير صحيحة لو لم يكن لدينا قواعد في الأصل. والآن السؤال الثاني والذي يأتي قبل الأول من

الناحية المنطقية: هل القواعد ممكنة أصلاً؟ طبعا يحلولنا القول بأنه يجب أن يكون هناك قواعد. يجب؟ ليس هناك ضرورة. إننا لا ندري. ولكن بدون قواعد لا يوجد علوم ولا بحث علمي. إننا نقبلها كمسلمة أن العلم ممكن وأن هناك قواعد.

نعود الآن للسؤال الأول: هل البديهية (١) تمثل القاعدة الصحيحة لتوازن الأوزان المتساوية؟ طبعا، كلنا نعرف كيف نزن رطلا من اللحم على الميزان ذي الأذرع المتساوية. لقد وضح ارخميدس تجربتنا العادية. إذن قاعدته «واضحة» بمعنى أننا معتادون على أمثلة لها. كلنا نعرف أن الماء المغلي يتحول إلى بخار، واضح أن الماء المغلي يعطينا بخارا. مجرد حدوث هذا الشيء واضح، ولكن السبب في حدوثه ليس واضحا. مجرد انطباق البديهية (١) في حالة الميزان واضح، لكن السبب وراء هذا ليس واضحا.

هذا يوصلنا إلى مبدأ السبب الكافي أوغير الكافي إذا شئت. يمكن توضيح هذا المبدأ بقصة حمار بوريدان. بوريدان كان فيلسوفا لاهوتيا ويعرف الآن بسبب حماره فقط ـ ونحن لا نعرف بالتأكيد ما إذا كانت قصة حمار بوريدان هي قصة بوريدان. ولكن بغض النظر عن هذا، لقد وجد الحيوان المسكين نفسه بين حزمتين من التبن. لقد كان في المركز بين هاتين الحزمتين الشهيتين والمتماثلتين تماما. لم يستطع الحمار من إيجاد سبب كاف للذهاب إلى حزمة دون الأخرى. وبسبب مبدأ السبب الكافي أوغير الكافي مات من الجوع.

نترك حمار بوريدان ونعود إلى رافعة أرخميدس. إذا وضعت الرافعة والخيوط والأوزان بشكل متناظر حول نقطة الارتكاز، لا يوجد سبب لهبوط أو ارتفاع الوزن الأيمن دون الوزن الأيسر. لنفرض أن الوزن الأيمن يهبط. لكن أيهما الوزن الأيمن؟ إذا نظرنا إلى الرافعة من الجهة الأخرى نجد أن الجهة اليمنى تصبح يسرى الآن. إذن قاعدة اليمين هنا متناقضة. وكذلك قاعدة اليد اليسرى متناقضة. هذه القواعد تعتمد على وجهة نظر الشخص ولكن الرافعة لا يهمها إذا روقبت أم لا. لذلك فإن الاختيار الوحيد الثابت هو البديهية (١).

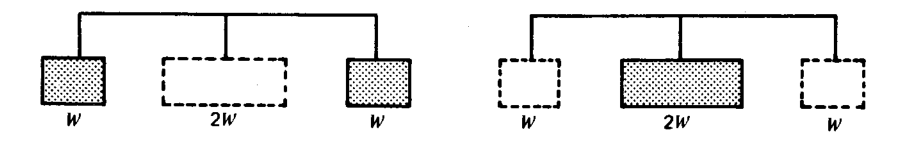
أرخميدس يفترض فرضية أخرى. وقد يكون استوحاها من التجربة التالية. كلنا نعرف أن حمل سلم بمساعدة شخص آخر أسهل من حمله بدونها. بدون مساعدة، تحمل الوزن كله على أكتافك وبالمساعدة يتوزع الوزن على أكتاف الحاملين. تصور أنك تحمل سلما منتظما مع شخص آخر. كل منكما عند طرف. من الذي يحمل الوزن الأثقل؟ تبادلا الأماكن. ستجد أنك تحمل نفس الوزن. إنكما تتقاسمان الوزن بالتساوي. إذن يمكن القول أنه في الحالة المثالية عندما يحمل السلم اثنان وأكتافهما عند نفس الارتفاع عن سطح الأرض فإن الوضع متناظر تماما وكلا منهما يحمل نصف الوزن تماما. أما إذا حمله شخص واحد فإنه يحمله عند منتصفه ليحصل على التوازن.

الآن نترك الاكتاف وتركز على الأوزان نفسها. نستنتج أن توازن سلم أو قضيب عديم الوزن ومعلق في كل طرف منه الوزن W لا يتأثر إذا بدلت الوزنين بوزن واحد $2W$ معلق في وسطه. وبالعكس يمكن استبدال الوزن $2W$ في الوسط بالوزن W عند كل طرف منه بدون أن يتأثر التوازن. هذه فرضية أرخميدس الثانية، ويمكن صياغتها باختصار على النحو التالي:

W عند كل طرف $\quad$ $2W$ في الوسط (مع الاتزان) $\qquad$ (A)

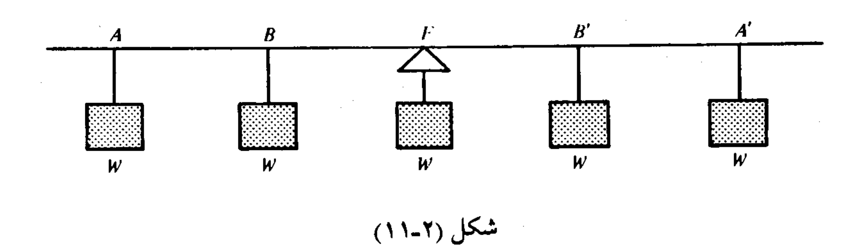
والشكل (٢-١٠) يوضح هذه الفرضية.

من البديهية (١) والفرضية (A) أو بالأحرى من تعميم للبديهية، يمكن استنتاج قانون أرخميدس للروافع. سأعطي فكرة عن طريقة البرهان للحالة العامة عن طريق حالات خاصة:



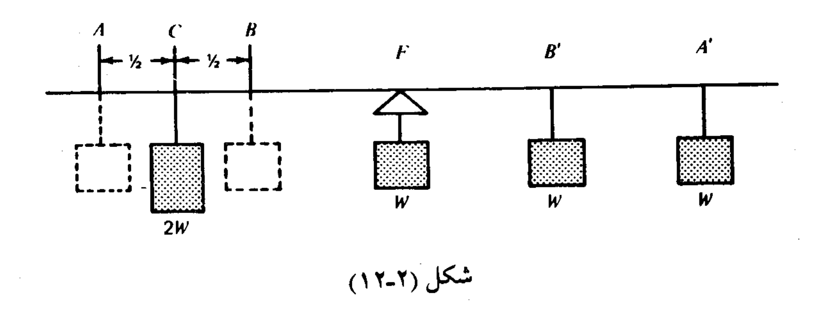
شكل (٢-١٠)

في البـدايـة تفحَّص شكل (٢-١١). نفرض أن الأوزان الخمسة المتساوية على مسافات متسـاويـة من بعضهـا البعض وتساوي الوحدة. المجموعة كاملة في وضع تناظر بالنسبة لنقطة الارتكاز ولذا نحصل على توازن حسب مبدأ السبب غير الكافي.



شكل (٢-١١)

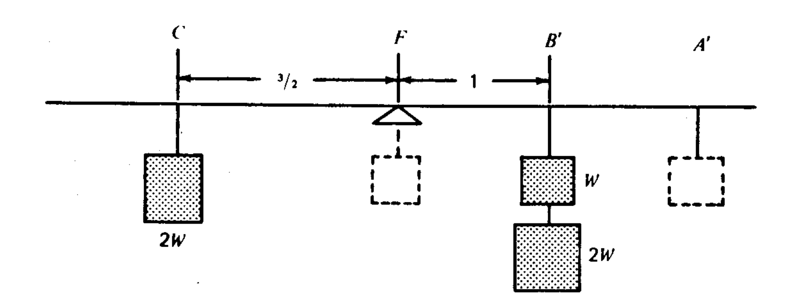
لدينـا محاكمـة بديلة. حسب البـديهية (١)، الوزنان عند A، A' متزنان في غياب جميع الأوزان الأخـرى، وكـذلـك الوزنان عند B، B' متزنان في غياب الأوزان الأخرى، وكذلك بالنسبة للوزن عند F ونستنتج من هذا أن جميع الأوزان عند A، A'، B، B'، F متزنة.



شكل (٢-١٢)

الآن تمعن في الشكل (٢-١٢). بالفرضية (A)، توازن قطعة الرافعة AB لا يتغير عندما نبدل الوزنين W عند A وB بالوزن $2W$ عند C وعليه فإن توازن الرافعة بكاملها لا يتغير.

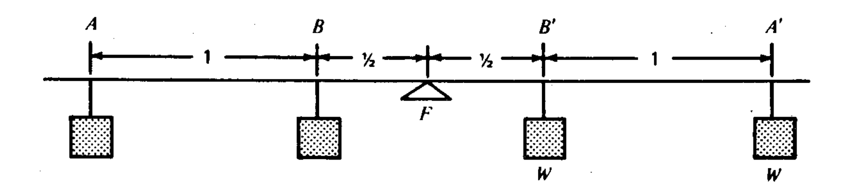
وأخـيرا، ادرس الشكـل (٢-١٣). بالفـرضية (A) لا يتغير توازن FA' حينما نبدل W عنـد F وW عنـد A' بالـوزن $2W$ عنـد B'؛ وكنتيجـة لذلـك فإن توازن الرافعة لا يتغير. باختصار، نقول إن الوزن $2W$ المعلق على بعد $\frac{3}{2}$ وحدة من نقطة الارتكاز يتزن مع الوزن $3/2$ المعلق على بعد الوحدة من الجهة الأخرى.



شكل (٢-١٣)

ولكن $$2W \cdot 1.5 = 3W \cdot 1;$$ (١)

أو الوزن × المسافة من نقطة الارتكاز = الوزن × المسافة من نقطة الارتكاز.



شكل (٢-١٤)

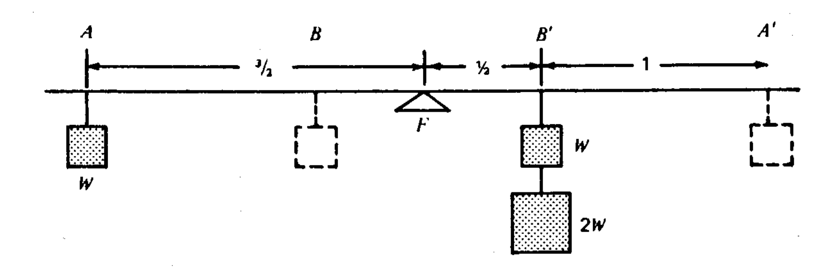
خذ مثالا آخر كما في الشكل (٢-١٤). بالتناظر أو بواسطة البديهية (١) نصل إلى أن الرافعة متزنة.

الآن، راجع الشكل (٢-١٥). بالفرضية (A) توازن BA' لا يتغير عندما نستبدل W عند B وW عند A' بالوزن $2W$ عند B' ؛ لذا فاتزان الرافعة ككل لا يتغير. إذن الوزن W على مسافة $\frac{3}{2}$ من محور الارتكاز يتزن مع $3W$ على بعد $\frac{1}{2}$ وحدة من المحور. لكن

$$W \cdot \frac{3}{2} = 3W \cdot \frac{1}{2};$$

ومرة أخرى نجد

الوزن × المسافة = الوزن × المسافة.



شكل (٢-١٥)

ضرب المعادلة (٢) في 2 يعطينا المعادلة (١) أو

$$W \cdot (2 \cdot \tfrac{3}{2}) = 3W \cdot (2 \cdot \tfrac{1}{2}),$$

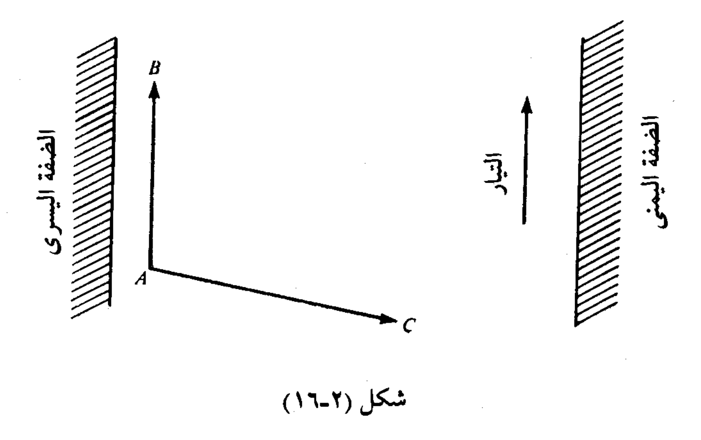
أي

$$W \cdot 3 = 3W \cdot 1.$$

وضح هذا التفسير البديل واستخدم بديهية أرخميدس لإثبات التوازن.

الجزء الثاني: المتجهات

مفهوم المتجه يظهر بصورة طبيعية وهو موضوع أساسي في الفيزياء ولا غنى عنه في الرياضيات التطبيقية. وحيث إنه واضح من البداية أن المتجهات مفيدة في مواضيع كثيرة فإن هذا يجعل من الممكن تدريس الموضوع في المراحل الأولى. إن إدخال المتجهات في منهج المدارس الثانوية يعتبر خطوة حقيقية إلى الأمام.

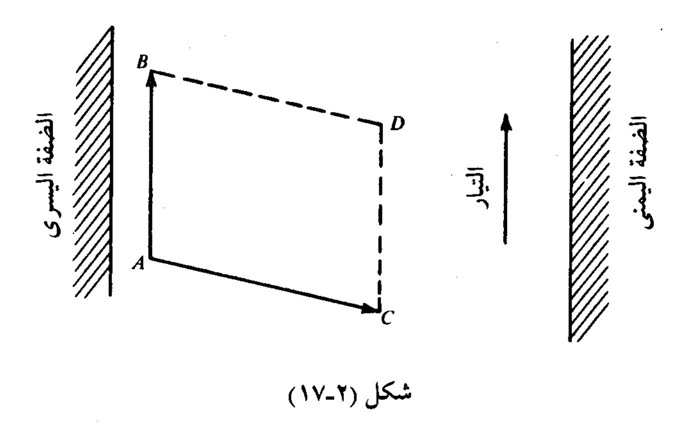


شكل (٢-١٦)

نبدأ بمثال؛ يريد رجل أن يعبر نهرا من الضفة اليسرى إلى اليمنى . وحيث إنه متكاسل عن التجديف فهو يستعمل قاربا بمحرك . إذا لم يشتغل المحرك فإنه يندفع مع تيار الماء . لنفرض أنه يندفع لمسافة AB في وحدة الزمن . انظر الشكل (٢-١٦) . إذا كنا في قمة المد ولم يكن هناك تيار في النهر والمحرك يعمل فإنه يقطع مسافة ولتكن AC في وحدة الزمن . إذا كان هناك تيار والمحرك يعمل فللقارب سرعتان بسبب العاملين كليهما . أين سيكون القارب بعد وحدة الزمن؟

الإجابة سهلة . خذ حالة خاصة . إذا كان القارب عند A ومتجه إلى أعلى النهر بسرعة ٤٤٠ قدم/ث (أي ٥ ميل/سا) ضد تيار معاكس له نفس السرعة فإنه لا يتحرك إلى أعلى ولا إلى أسفل، بل يبقى ثابتاً بالنسبة لضفة النهر. بعد دقيقة سيكون في نفس الموقع الذي سيكون فيه بعد دقيقتين لو تحرك تحت تأثير التيار بدون محرك في الدقيقة الأولى وتحت تأثير المحرك بدون تيار في الدقيقة الثانية . في الدقيقة الأولى يتحرك مسافة ٤٤٠ قدماً إلى أسفل النهر مع التيار وفي الدقيقة الثانية يتحرك ٤٤٠ قدماً في الاتجاه المعاكس للتيار. إذن بعد دقيقتين يكون في نفس مكانه الأصلي تحت تأثير كل من التيار والمحرك لمدة دقيقة . باختصار، محصلة قوتي التيار والمحرك هي نفس المحصلة لو كان كل منهما مستقلا عن الآخر.

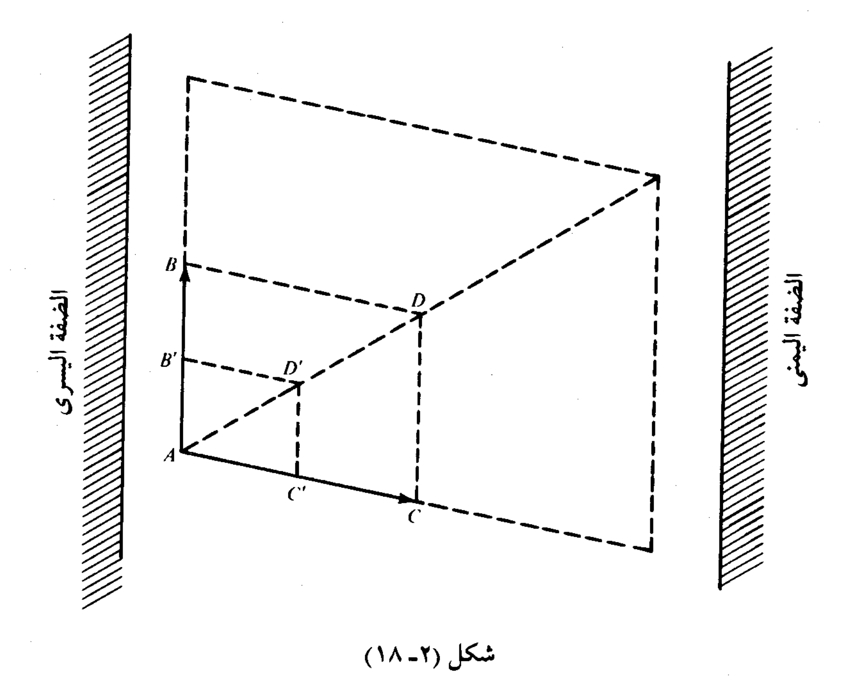
نعود إلى الحالة العامة في الشكل (٢-١٦). من الطبيعي أن نفترض وجود القارب بعد وحدة الزمن مثل دقيقة عند النقطة D حيث $ABDC$ متوازي أضلاع. انظر الشكل (٢-١٧). بعد دقيقة وتحت تأثير التيار وبدون محرك يندفع القارب إلى B ، وفي الدقيقة التالية تحت تأثير المحرك وبدون التيار يندفع إلى D. إذن تحت تأثير قوتي التيار والمحرك تواليا يكون القارب عند D بعد دقيقتين. وبصورة أخرى، إذا بدأ القارب عند A تحت تأثير المحرك وبدون تيار يصبح بعد دقيقة عند C وفي دقيقة أخرى تحت تأثير التيار فقط يصل إلى D. بأي طريقة ننظر إلى الوضع، محصلة المحرك والتيار لمدة دقيقة واحدة هي وصول القارب إلى D. أليس طبيعيا أن نستنتج أن محصلة القوى لمدة دقيقة هي وصول القارب إلى D ؟ وهكذا توصلنا إلى قانون متوازي الأضلاع للإزاحات.



شكل (٢-١٧)

في نصف (أو ضعف) الوقت، إزاحة القارب أسفل النهر تصبح نصف (أو ضعف) AB قل AB' وإزاحته عبر النهر نصف (أو ضعف) AC ، قل AC' أي أن مكان القارب الناتج من الازاحتين هو D' حيث $AB'D'C'$ متوازي أضلاع أضلاعه نصف (أو ضعف) أضلاع متوازي الأضلاع $ABDC$. انظر الشكل (٢-١٨).

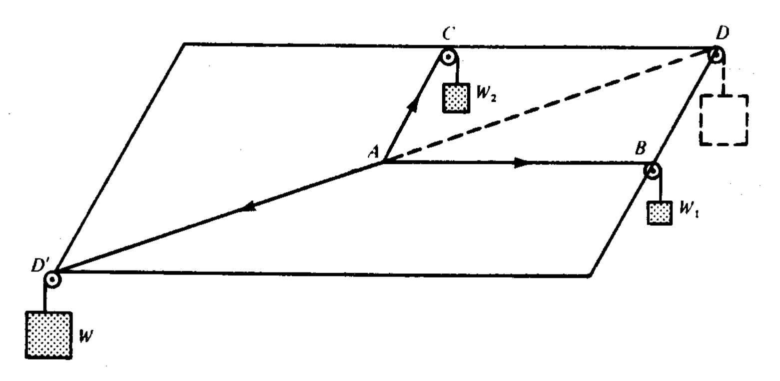
بصورة عامة وبغض النظر عن الزمن، نسبة AB' إلى AB هي نسبة AC' إلى AC ، والمكان D' الحاصل من الازاحتين AB' وAC' سيكون بحيث أن متوازيي الأضلاع



شكل (٢ـ ١٨)

$AB'D'C'$ و$ABDC$ متشابهان ولذا فإن المثلثين $AC'D'$ وACD متشابهان أيضا. بالهندسة نستنتج أن D' تقع على AD أو امتداده. إذن مسار القارب على AD. لكن AB وAC يمثلان المسافتين المقطوعتين إلى أسفل وعبر النهر في وحدة الزمن، دقيقة واحدة، إذن هاتان الازاحتان تمثلان مركبتي السرعة في هذين الاتجاهين وتكون المحصلة هي AD. وهكذا نحصل على قانون متوازي الأضلاع للسرعات.

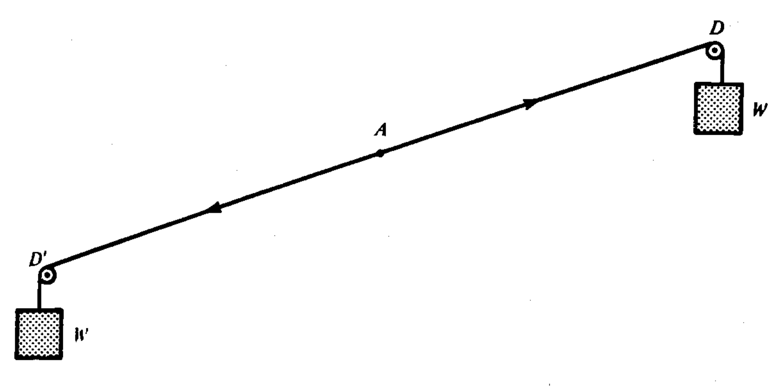
الإزاحات والسرعات كميات جديرة بالملاحظة. حيث إن لها اتجاهات بالإضافة إلى قيمها العددية فمن المعقول تمثيلها بقطع مستقيمة موجهة أو ما نسميها متجهات. اتجاه الكمية يعينه اتجاه قطعة المستقيم ومقدار الكمية يتعين بطول القطعة. بما أن الازاحات والسرعات متجهات فإن محصلة أي اثنتين منها تمثل قطر متوازي الأضلاع المار بالنقطة المشتركة للضلعين اللذين يمثلان الكميتين. كثير من الكميات الطبيعية لها طبيعة المتجهات. يعرف الملاكمون الفرق بين لكمة مباشرة يمينية ولكمة شاقولية؛ اتجاه اللكمة قد يكون حاسماً. إذن علينا أن نتوقع قانون متوازي أضلاع للقوى كذلك.



شكل (٢-١٩)

خذ الشكـل (٢-١٩). النقطـة عنـد A في حالـة اتـزان تحت القوة W_1 على الخيط AB والقـوة W_2 على الخيـط AC والقـوة W على الخيـط AD' . وبـما أن A متـزنـة تحت القـوى الثـلاث، إذن فهي متـزنـة تحت أي واحدة منها ومحصلة القوتين الأخريين، إذن A متزنة تحت القـوة على AD' ومحصلة القـوتـين على AB وAC.لكن A تكـون متزنة فقط إذا كانت هذه المحصلة مسـاويـة في المقـدار للقـوة على AD' وتعمـل في الاتجـاه المعـاكس. انظـر الشكل (٢-٢٠). التجربة تؤكد توقعاتنا. لقد وجد أنه إذا كانت أطوال AB وAC وAD' هي W_1 و W_2 وW وحـدات على التـوالي فإن الـرأس الرابع D لمتوازي الأضلاع والذي أضلاعه AB وAC يبعـد عن A بحيث يكـون طول AD يسـاوي W وحـدات وتكـون D' وA وD على استقـامـة واحـدة. باختصار، إذا كانت AB وAC متجهات تمثل قوى في قيمتها واتجاهها فإن القطر AD في متوازي الأضلاع $ABDC$ متجه يمثل محصلة القوى في القيمة والاتجاه.

بالطبع هنا نجد عنصر المثالية كما هو موجود في كل التجارب. عندما افترضنا أن الأوزان تؤثر بقوى W_1 ، W_2 ، W على A فإننا نفترض أن الخيوط عديمة الوزن وكاملة المرونة وأن البكـرات الصغـيرة عديمـة الاحتكـاك. . . الـخ. كلما اقتربت ظروف التجربة من الظروف المثالية، كلما أثبتنا قانون متوازي الأضلاع بصورة أدق.

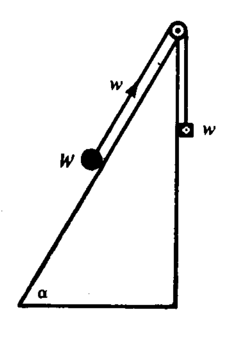


شكل (٢-٢٠)

(٢ - ٢ - ١) السطح المائل

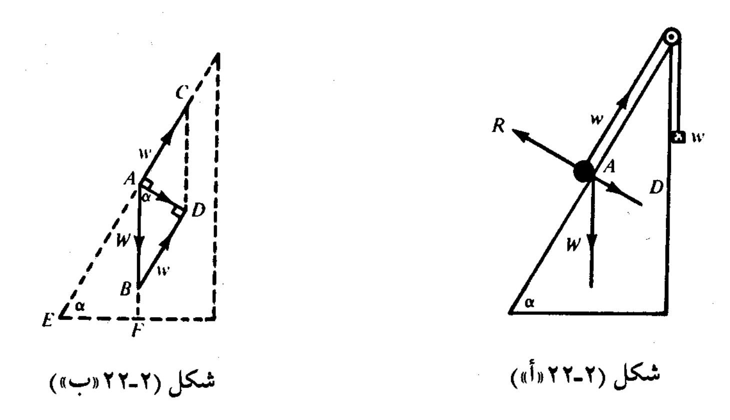
خذ جسماً وزنه W في حالة اتزان على سطح مائل صلب أملس وزاوية ميله α كما في الشكل (٢-٢١). بافتراض ظروف مثالية، نستنتج أن الشد على طول الخيط كله هو w. ما هي w بدلالة W ؟

الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى هي وزنه W والذي يعمل إلى أسفل وشد الخيط w الذي يعمل إلى أعلى السطح وR رد فعل السطح. حيث إننا افترضنا عدم وجود احتكاك بين الجسم والمستوى إذن R ليس لها مركبة باتجاه السطح، ولذا فهي عمودية على السطح. أيضا R يجب أن تكون معاكسة ومساوية في المقدار لمحصلة القوتين الأخريين.



شكل (٢-٢١)

لكن من قانـون متـوازي الأضـلاع ، اتجـاه ومقدار محصلة القوتين الأخريين يُمثَّل بالقطر المار في A من متوازي الأضلاع والذي تشترك أضلاعه التي تمثل W وw في الرأس A . نستنتج أن القطر المار في A عمودي على السطح المائل.



شكل (٢-٢٢«أ»)

شكل (٢-٢٢«ب»)

انظـر شكــل (٢-٢٢«أ»). من شكــل (٢-٢٢«ب») نجـد أن كلا من $\angle BAD$ و $\angle AEF$ تكـمـل $\angle EAB$ ولـذا فإن $\angle BAD = \alpha$ وحـيـث $BD \| AC$ إذن $\angle BDA = 90°$. وبما أن $AB = W$ إذن $BD = AC = w$.

من المثلث ABD نجد

$$\frac{w}{W} = \sin \alpha$$

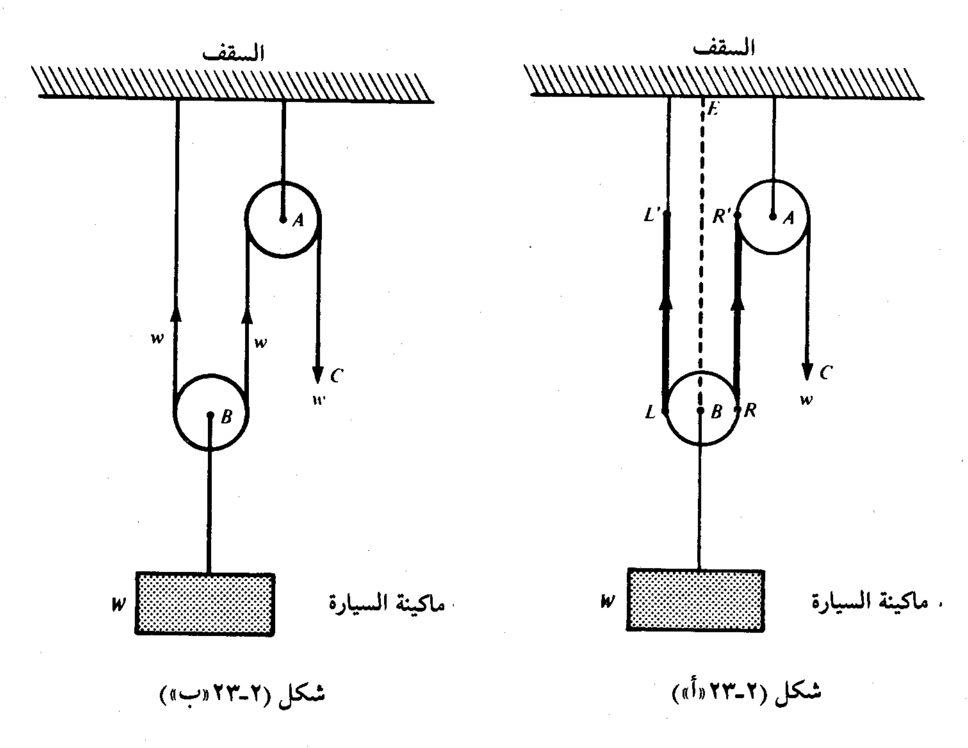
ومنه

$$w = W \cdot \sin \alpha.$$

مع أن ستيفينـوس عثـر على هذه النتيجـة بطريقة مبدعة ومثيرة إلا أن نقطة الضعف في أسلوبه هي أنه لا يضاهي أبداً قانون متوازي الأضلاع في تطبيقاته الواسعة.

(٢ ـ ٢ ـ ٢) البكرة

نظام البكرات يمكننا من رفع أثقال لا يمكن رفعها بالقوة العضلية وحدها. افرض أنك تحتـاج لرفـع المـاكينـة من سيارتك لإصلاحها. بدلا من محاولة رفعها بنفسك، يمكنك رفعها بجهد أقل بواسطة نظام البكرات الموضح في الشكل (٢ـ٢٣).



شكل (٢ـ٢٣«أ»)

شكل (٢ـ٢٣«ب»)

كالعـادة نفـترض ظروف مثالية، وأن السحب عند C سيرفع الماكينة بدلا من أن يسقط السقف. إذا كانت البكـرات عديمـة الاحتكـاك (مـركز A مثبت) والحبال عديمة الوزن فإن القوة w إلى أسفل عند C تعطي شدا في الحبل يساوي w، ولذا فإن B عندما تتزن فهي متزنة تحت تأثير قوتين إلى أعلى كل منها تساوي w وقوة إلى أسفل W. إذن

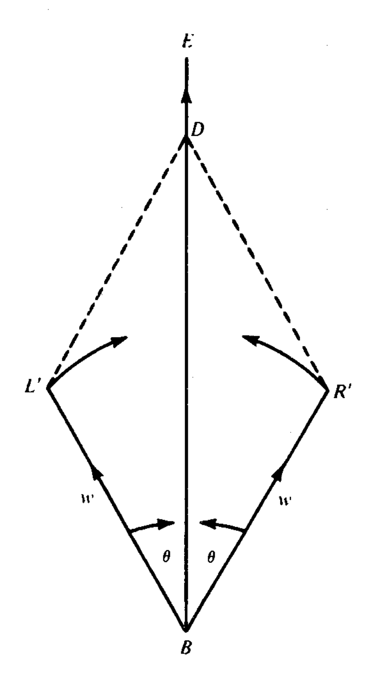
$$w + w = W$$

وهذا يعطينا

$$w = \tfrac{1}{2} W.$$

إذا زادت w فإن الماكينة ترتفع.

لاحظ أن هذه العلاقة نتيجة لقانون متوازي الأضلاع للقوى إذا أهملنا أبعاد البكرة التي مركزها B. انظر الشكل (٢-٢٣«ب») حيث LL' و RR' يمثلان قيمة واتجاه القوى العلوية على البكرة بمركز B. عندما تتلاشى هذه البكرة إلى النقطة B فإن L وR يتطابقان عند B ويصبح للمستقيمين LL' و RR' نفس زاوية الميل θ على المستقيم الرأسي BE. الآن نكمل متوازي الأضلاع $BR'DL'$. انظر الشكل (٢-٢٤).



شكل (٢-٢٤)

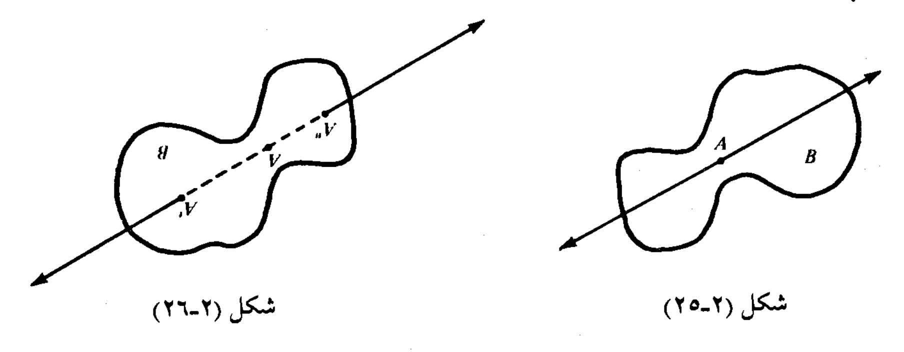
عندما تؤول BL' و BR' إلى BE فإن L' و R' تنطبقان وينطبق $R'D$ على BE لأنه يبقى موازياً لـ BL' . لكن $R'D$ يساوي BL' في الطول، ولذا فإن BD ينطبق على BE وطوله ضعف طول BL' . وهكذا نحصل من قانون متوازي الأضلاع على أن المحصلة تساوي $2w$ وتعمل رأسيا إلى أعلى.

نترك للقـارىء إثبـات أن محصلة قوتـين متسـاويتـين ومتعـاكستـين تساوي صفرا وذلك باستخدام قانون متوازي الأضلاع .

(٢ ـ ٢ ـ ٣) الرافعة

لدينـا الآن فكـرة عن الطـريقـة التي استنتـج بها أرخميدس قانون الروافع . دعونا نستنتج القانون بواسطة قانون متوازي الأضلاع .

في البداية لدينا ملاحظة حول الأجسام الصلبة . واضح أن الجسم الصلب B يكون متزنا تحت تأثير قوتين متساويتين ومتعاكستين وتؤثران في نفس النقطة من الجسم ولتكن النقطة A. انظـر الشكـل (٢ـ٢٥) . ولكننـا نعـرف من لعبة شد الحبل أن أعضاء الفريق الواحد يشدون الحبل عند نقاط مختلفة . هل هذا ذو أهمية؟ طبعا لا . B ستبقى متزنة لو أن نقاط تأثير القوى المتسـاويـة والمتعـاكسـة أصبحت عنـد A' و A'' بدلا من كونهـا جميعـا عند A. انظر الشكل (٢ـ٢٦) . مواقع تأثير القوى ليس لها تأثير على الإطلاق بشرط أن تكون القوتان المتعاكستان والمتسـاويتـان لهما نفس الحـامـل . إن قابليـة نقـل القـوى عنـد A' و A'' ما هي إلا نتيجـة لصلابة B.

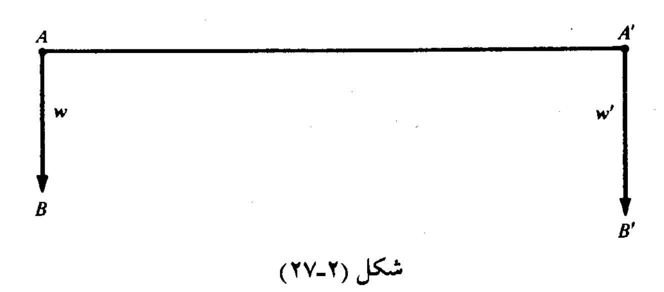


شكل (٢ـ٢٥)   شكل (٢ـ٢٦)

بإمكان القارىء أن يتحسس أهمية مبدأ قابلية نقل القوى عندما يرى أن المبدأ يمكننا من استنتاج شروط توازن الرافعة من قانون متوازي الأضلاع . نحن الآن جاهزون لهذا الاستنتاج .

يمكن صياغة المشكلة بصورة عامة على النحو التالي. ما هي شروط اتزان رافعة صلبة عديمة الوزن AA' بالأوزان w و w' المعلقة من الطرفين A و A' ؟ أين نقطة الارتكاز F على AA' وما هي القوة المؤثرة على الرافعة عند F ؟ فرضية أرخميدس (A) الموضحة في الشكل (٢-١٠) توحي بجزء من الحل. في هذه الحالة الخاصة المتناظرة حيث w و w' متساويتان نجد أن قوة رأسية تساوي مجموع الوزنين وتعمل عند نقطة الارتكاز في منتصف AA' تؤمن التوازن. ألا يوحي هذا بأنه في الحالة العامة نحتاج إلى قوة رأسية $w + w'$ عند نقطة ما F على AA' ؟ نعم، ولكن أية نقطة؟ عندما لا تتساوى w و w' فإننا نفقد التناظر وF ليست في المنتصف. مقدمتنا لطريقة أرخميدس في الروافع ستساعد القارىء على تعيين F.

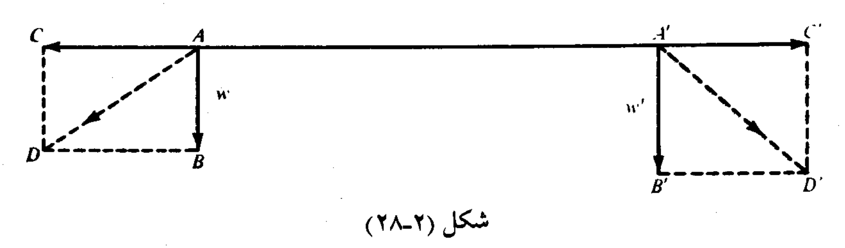
لكي نستعمل قانون متوازي الأضلاع لتحديد محصلة w عند A و w' عند A' ، سنمثل هاتين القوتين بالمستقيمين AB و $A'B'$ المرسومين عموديا إلى أسفل وأطوالهما w و w' على التوالي، وبهذا نمثل هاتين القوتين من حيث القيمة والاتجاه. سنجد أنفسنا أمام صعوبة. بما أن AB و $A'B'$ مستقيمان متوازيان فإنهما لا يتقاطعان مهما امتدا ولذا لا نستطيع رسم متوازي أضلاع للحصول على محصلتهما. انظر الشكل (٢-٢٧).



شكل (٢-٢٧)

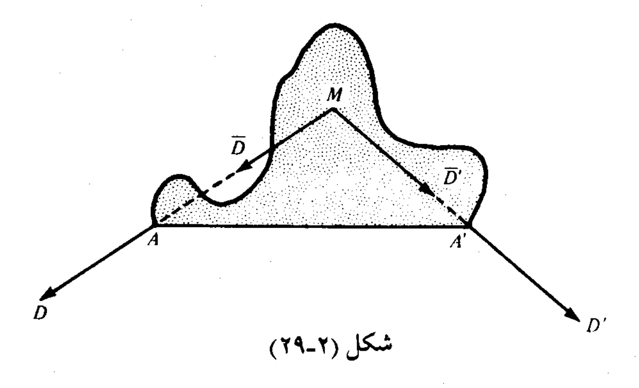
يمكن التغلب على هذه الصعوبة. لو لم تكن w ، w' متوازيتين لما واجهنا أي صعوبات. علينا إذن استبدالهما بقوتين متكافئتين (أي قوتين لهما نفس التأثير) وغير متوازيتين. هل يمكن إضافة قوة إلى w وقوة إلى w' لكي نحصل على محصلتين غير متوازيتين ولهما نفس تأثير القوتين w و w' ؟ لنفترض أننا أدخلنا قوتين متساويتين ومتعاكستين

عنـد A ، واحـدة في اتجـاه $A'A$ والأخرى في اتجاه AA' . كل من هاتين القوتين يلغي تأثير الأخـرى، والتـوازن لا يتأثـر. ولكن من مبـدأ قابليـة نقـل القوة، نستطيع تحريك نقطة تأثير إحـدى القـوتـين إلى A' بشـرط عدم تغيـير قيمة أو اتجاه القوة. التمثيل بالمتجهات للوضع الجـديـد يظهـر في الشكـل (٢ـ٢٨). المتجهتـان AC و $A'C'$ تمثـلان قوتي لعبة شد الحبل. بإكمال متوازيي أضلاع المتجهات عند A و A' نحصل على المتجهتين AD و $A'D'$ واللتين تمثلان القوتين عند A و A' على الترتيب. هاتان المحصلتان مجتمعتان لهما نفس التأثير على الـرافعـة كما لأزواج المـركبـات، وأزواج المركبات لها نفس التأثير الذي للقوى الأصلية. فإذا كانت الرافعة متزنة أصلا فإنها تبقى متزنة الآن. وهكذا تغلبنا على هذه الصعوبة.



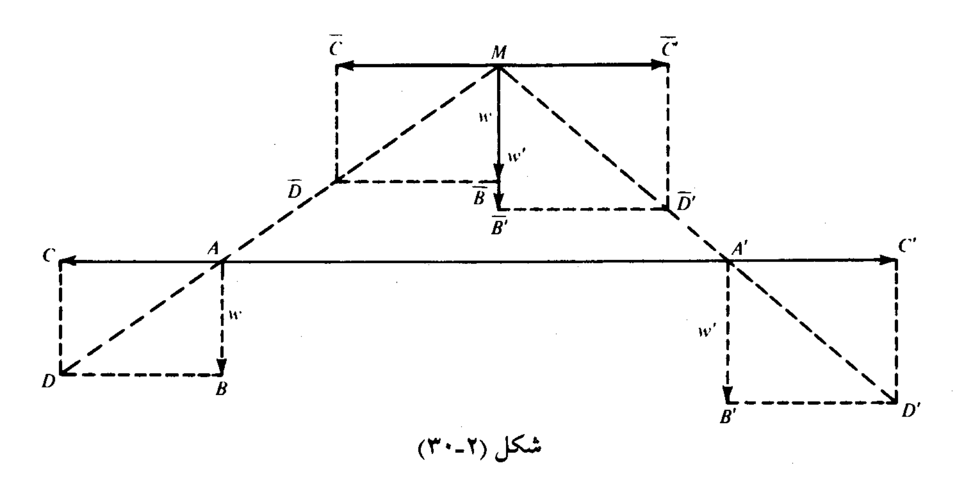
شكل (٢ـ٢٨)

لنفرض أن الرافعة AA' صلبة وعديمة الوزن. بما أنها عديمة الوزن فليس هناك قوى جديـدة والتـوازن لا يتغـير؛ وحيث إنهـا صلبـة فإنـه يمكن نقل القوتين على حامليهما. انظر الشكـل (٢ـ٢٩). لنفـرض أن خطي عمـل القـوتين عند A و A' هما AD و $A'D'$ واللذان تتقاطع امتداداتها عند M. وبدون أي تأثير على الوضع نستبدل القوتين عند A و A' بقوتين لهما نفس القيمة والاتجاه ونقطة تأثيرهما المشتركة M .



شكل (٢ـ٢٩)

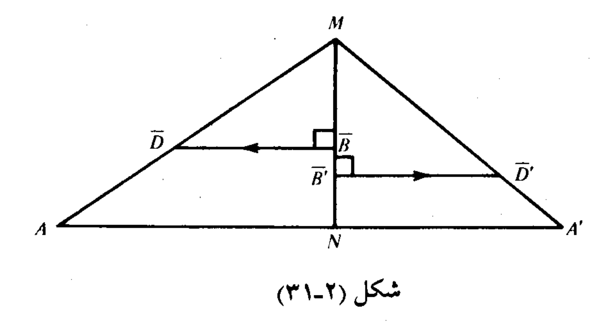
متجها القوتين عند M هما المستقيمان المتجهان $M\bar{D}$ و$M\bar{D}'$ حيث $AD = M\bar{D}$ و$M\bar{D}' = A'D'$. انظر الشكل (٢-٣٠).



شكل (٢-٣٠)

لكن $M\bar{D}$ يمكن تحليله إلى مركبتين مساويتين لمركبتي المتجه AD إلا أن نقطة التأثير مختلفة. بالمثل $M\bar{D}$ لها نفس مركبتا المتجه $A'D'$. انظر الشكل (٢-٣٠). لكن قوتي شد الحبل AC و$A'C'$ تلغي كل منهما الأخرى وكذلك الزوج $M\bar{C}$ و $M\bar{C}'$ يلغي بعضه بعضاً. إذن المحصلة عند M تساوي محصلة القوتين w و w' وتعمل رأسيا إلى أسفل. إذن من قانون متوازي الأضلاع نجد أن المحصلة عند M هي $w + w'$ وتعمل رأسيا إلى أسفل.

السؤال الشيق هو: أين يتقاطع خط عمل المحصلة مع AA' ؟ خذ الشكل (٢-٣١). نتذكر أن المستقيم الموازي لقاعدة المثلث يقسم الأضلاع بصورة متناسبة.



شكل (٢-٣١)

إذن في المثلث AMN

$$\frac{NA}{MN} = \frac{\overline{B}\overline{D}}{M\overline{B}}, \qquad (١)$$

وفي المثلث $A'MN$

$$\frac{NA'}{MN} = \frac{\overline{B}'\overline{D}'}{M\overline{B}'}. \qquad (٢)$$

من (١)

$$NA \cdot M\overline{B} = MN \cdot \overline{B}\overline{D}. \qquad (٣)$$

ومن (٢)

$$NA' \cdot M\overline{B}' = MN \cdot \overline{B}'\overline{D}'. \qquad (٤)$$

لكن

$$\overline{B}\overline{D} = M\overline{C} = AC = A'C' = M\overline{C}' = \overline{B}'\overline{D}'$$

كما في الشكل (٢-٣٠)، ولذلك فإن

$$MN \cdot \overline{B}\overline{D} = MN \cdot \overline{B}'\overline{D}'.$$

من (٣) و(٤) نصل إلى

$$NA \cdot M\overline{B} = NA' \cdot M\overline{B}'. \qquad (٥)$$

وهـذه هي الإجـابـة لسؤالنـا. خط عمـل المحصلة الرأسي يقطع AA' عند النقطة N والتي تحقق العلاقة (٥).

وباستخدام مبدأ نقل القوة مرة أخرى، نستبدل المحصلة التي تعمل عند M بقوة لها نفس القيمة والاتجاه وتعمل عند N وهكذا نكون قد أثبتنا أن محصلة القوتين w و w' الرأسيتين عند A و A' على الترتيب هي القوة الرأسية $w + w'$ وتعمل عند N. لكن الرافعة تكون متزنة تحت تأثير قوتين قيمة كل منهما $w + w'$ وتعملان عند N إحداهما إلى أعلى والأخرى إلى أسفل. وعليه إذا وضعنا محور ارتكاز F عند N فإن الرافعة تبقى متزنة تحت القوى الأصلية. ومن (٥) نجد أن الرافعة في حالة اتزان إذا

$$FA \cdot M\bar{B} = FA' \cdot M\bar{B}'.$$

وبما أن $M\bar{B} = AB = w$ و $M\bar{B}' = AB' = w'$ وبجعل $FA = a$ و $FA' = a'$ نجد أن

$$a \cdot w = a' \cdot w'.$$

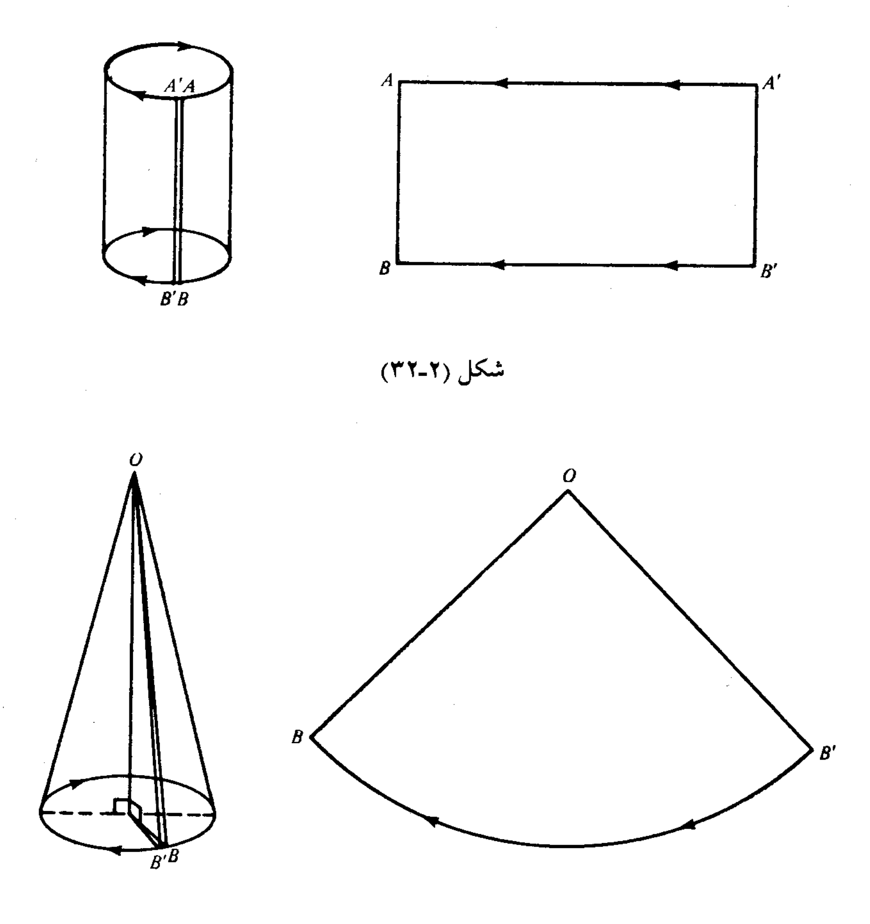
وهكذا استنتجنا قانون أرخميدس للروافع من قانون متوازي الأضلاع للمتجهات.

(٢ ـ ٢ ـ ٤) تطبيق أرخميدس لقانونه الخاص بالروافع

لقد وضحنا كيف تم لأرخميدس اكتشاف قانون الروافع. كما تعرف أرخميدس هو أعظم رياضي يوناني، بل هو واحد من أعظم الرياضيين قاطبة. السبب الرئيسي لشهرته هو اكتشافه لمبادىء حساب التكامل، وقد توصل إلى هذا الاكتشاف عن طريق تطبيق بارع لقانون الروافع.

إن الأسباب الرئيسية التي دعت إلى حساب التكامل هي الحاجة إلى حساب المساحات والحجوم المحصورة داخل خطوط وسطوح منحنية. مثلا، حساب حجم الكرة يتطلب حساب التكامل. لقد كان أرخميدس أول من حل هذه المسألة الصعبة والهامة. ما هو وجه الصعوبة في هذه المسألة؟ وما علاقتها بالروافع؟

نبـدأ بالسؤ ال المتعلق بالصعـوبـة . قارن الكـرة بالمجسـمات الأخـرى مثـل الأسطـوانة والمخـروط . الكـرة مستـديرة في جميع الاتجاهات أما الاسطوانة والمخروط فيمكن وصفها بأنها نصف مستـديـرة . يمكن قص المساحة الجانبية للاسطوانة القائمة على المستقيم AB ومن ثم فردهـا في صورة مستطيـل بدون أي تشـويـه . انظـر الشكـل (٢-٣٢) . وكـذلك يمكن قص المسـاحـة الجانبية للمخروط القائم على المستقيم OB وفردها إلى قطاع دائري بدون تشويه . انظـر الشكـل (٢-٣٣) . لا يمكن عمـل هذا للكـرة . كلنا قشرنا البرتقال . سطح الكرة أكثر تعقيداً وهذا يعني أن حساب حجمها أصعب .



شكل (٢-٣٢)

شكل (٢-٣٣)

السؤ ال الثاني «ما علاقة الروافع بحساب حجم الكرة؟» لا يمكن الإجابة على هذا السؤ ال مباشرة. كل مسألة يُنظر إليها من وجهة نظر معينة. يجب أن نتساءل : ما هي ظروف المسألة بالنسبة لأرخميدس؟ كيف تصور أرخميدس ومعاصروه والذين سبقوهم مفهوم الحجم؟

ما هي الحجوم التي نعرف قوانينها؟ بعض الحجوم سهل مثل حجم متوازي السطوح القائم أو باختصار الصندوق. حجمه يساوي حاصل ضرب الطول في العرض في الارتفاع. هل تعرف القانون للمنشور القائم؟ لكن ما هو المنشور القائم؟ إنه مجسم أعلاه مضلع يطابق ويوازي قاعدته ووجوهه الجانبية (متوازيات أضلاع) عمودية على القاعدة. حجمه يساوي حاصل ضرب مساحة القاعدة في الارتفاع. لاحظ أن الصندوق منشور قاعدته مستطيل ولذا ينطبق قانون المنشور في هذه الحالة الخاصة. الاسطوانة القائمة مجسم قريب من المنشور. أليس واضحاً أنه عندما تزداد أضلاع قاعدة المنشور القائم والذي قاعدته مضلع منتظم فإن المنشور يقترب أكثر فأكثر من الاسطوانة القائمة؟ ألا يوحي هذا بأن نفس القانون ينطبق على الاسطوانات القائمة؟

حالة الهرم أصعب بكثير. حجمه يساوي ثلث مساحة القاعدة في الارتفاع. هنا أيضا عندما تزداد أضلاع قاعدة الهرم المنتظمة فإن الهرم يقترب من المخروط. من الطبيعي أن نتوقع أن قانون حجم الهرم ينطبق على المخروط.

من الذي اكتشف حجم الصندوق والمنشور والاسطوانة؟ إننا لا نعلم بالتأكيد. إن هذه القوانين وحتى قوانين الهرم والمخروط كانت معروفة لدى المصريين. لم يكونوا يعرفون براهين دقيقة لها ولكنهم استخدموها. ولكن يمكن إعطاء بعض المعلومات الأكيدة حول المخروط.

لقد اكتُشف حجم المخروط من قبل ديموقريطس *(Democritus)* الذي عاش حوالي ٤٠٠ قبل الميلاد. لقد خمن القانون ولم يثبته : هناك دلائل على أن تخمينه لم يكن عشوائيا وإنما

استند إلى بعض الشواهد. وكما قال أرخميدس فإن ديموقريطس يستحق الفضل الكبير على هذا التخمين لأن هذا سهل البرهان. يودوكسس *(Eudoxus)* ٤٠٨ـ٣٥٥ قبل الميلاد، أحد تلاميذ أفلاطون أعطى برهاناً دقيقاً لقانون المخروط. بسبب عناء الكتابة في ذلك الوقت لم يُكتب إلا نسخ قليلة من مخطوطاته ولم يبق منها شيء. في تلك الأزمنة، الطبعات لا تصل إلى الآلاف أو مئات الآلاف من النسخ كما يحدث للكتب الحديثة وخصوصا الرديئة منها ومع ذلك فإن محتوى ما كتبه معروف لدينا. أقليدس *(Euclid)* الذي عاش حوالي ٣٠٠ قبل الميلاد، ألف كتاب مبادىء الهندسة كما يعرف جميع طلاب المدارس من جيلي. إن إنجاز أقليدس العظيم هو تنظيم أعمال من سبقوه. كتابه يحتوي على أشياء كثيرة بالإضافة للهندسة، لقد فهم اليونانيون الهندسة بصورة أعم. لقد حفظ هذا الكتاب العديد من براهين يودوكسس.

لقد درس وتأمل أرخميدس بعمق أعمال من سبقوه، وهذه هي الظروف التي واكبت تصوره لمشكلة الدائرة وهنا نجد المفتاح لسر علاقة الروافع بالحجوم.

للبحث عن السر نعود إلى ديموقريطس. إذا كنت قد سمعت اسمه من قبل فمن المحتمل أنك قد سمعته في محاضرة فلسفية وليس في مادة الرياضيات. لقد اشتهر بأنه فيلسوف ومؤسس النظرية الذرية. تصور ديموقريطس للذرة يختلف تماما عن تصور الفيزيائيين المعاصرين. العالم بالنسبة له ولمن عاصره من الفيزيائيين مكون من ذرات بالرغم من اتصال المادة الظاهري. الاختلاف الأساسي هو أن ديموقريطس تصور الذرة غير قابلة للانقسام. يمكن من الناحية النظرية على الأقل تجزئة المادة إلى قطع صغيرة وهذه إلى قطع أصغر إلى أن نصل إلى الذرات والتي لا يمكن تجزئتها أبداً.

يحسن بنا أن نتوقف قليلا ونتأمل كيف خمن ديموقريطس حجم المخروط. ما يمكن قوله هنا تأملي بالضرورة ولكن يوجد بعض الشواهد التي تسند ما نقوله.

في البداية خذ حجم الصندوق. كيف نقنع الطفل بأن حجم القالب الذي أضلاعه ٣و٤و٥ بوصة يساوي ٦٠ بوصة مكعبة؟ حقا، نقسمه إلى ٦٠ مكعباً أبعادها تساوي الوحدة ونعتبر أن حجم كل مكعب وحدة الحجوم. يمكن اعتبار مكعب الوحدة ذرة واحدة وأن القالب مصنوع من ٦٠ ذرة. الاعتراض الوحيد هنا هو أنه باستعمال ذرة ديموقريطس فإننا نعني أن مكعب الوحدة لا يمكن تقسيمه إلى مكعبات أصغر ولكننا لا نحتاج إلى هذا في البرهان.

الآن هل يمكن إثبات أن حجم القالب ٥" × ٤" × ٣ ١/٢" يساوي ٧٠ بوصة مكعبة بنفس الطريقة؟ ليس بنفس الطريقة تماما لأن الضلع ٣ ١/٢" لا يمكن أن يكون ضلعاً لعدد صحيح من مكعبات الوحدة. التعديل الضروري واضح. نقسم القالب إلى ٥٦٠ مكعباً أو ذرة أبعادها تساوي ١/٢" ثم نعيد تجميعها لنحصل على ٧٠ مكعب وحدة. إذن مشكلة حساب الحجم تتحول إلى إحصاء عدد الذرات. حقًّا هذه هي وجهة نظر ديموقريطس الرئيسية.

الخطة بسيطة ولكن التطبيق قد يكون صعباً. لنفرض أننا نريد إيجاد حجم قالب أبعاده ٥ ١/١٠" × ٤ ١/١٠" × ٣". إن تعداد ٦٤٨٢١ ذرة أي مكعبات أبعاد كل منها ١/١٥"، أمر يسهل قوله ولكن يصعب تنفيذه. يعد المرء إلى ٣٧٤٢٨ ثم ينسى هل هذا العدد يمثل عدد الذرات المحصاة أو عدد الذرات التي ستحصى ثم يبدأ من جديد. ماذا نعمل إذن؟ نستطيع تبسيط عملية العد بتجميع أعداد كبيرة من هذه الذرات عن طريق الضرب بطبقات. إن القالب الذي قاعدته ٤×٣ وارتفاعه ٥ يحتوي على ١٢ ذرة (مكعبات الوحدة) في الطبقة الأولى و١٢ في الطبقة الثانية. . .، ومن هذا نستنتج أن عدد الذرات الكلي هو١٢×٥. نعد الذرات بالتعامل مع كل طبقة أو مقطع على حده. طبعاً ديموقريطس كان يعرف هذا أيضاً.

ما هو المقطع أو الطبقة المناسبة للمخروط؟ نعم، إنها الطبقة الموازية للقاعدة. إذن يمكن اعتبار المخروط مكون من أقراص دائرية متجاورة سماكة كل منها ذرة واحدة. ولكن هناك

بعض التعقيد. مع أن الطبقات المتتالية لها نفس الشكل، مثل القالب، إلا أن أحجامها تختلف. إن العد في هذه الحالة يفرض علينا مفهوم المقطع المتغير.

إننا لا نعلم إلى أي حد طور ديموقريطس هذا المفهوم. لقد كان يعلم أن المكعب يمكن تجزئته إلى ثلاثة أهرامات متطابقة؛ ولذا فإن حجم الهرم في هذه الحالة يساوي ثلث القاعدة × الارتفاع، وعلى هذا الأساس خمن أن جميع الأهرامات والحالة النهائية أي المخروط لها نفس القانون.

لقد تمكن يودوكسس من إعطاء البرهان اللازم. البرهان صعب وتفاصيله تستغرق عدة محاضرات. يمكن للقارىء الاطلاع عليه في كتاب إقليدس الثاني عشر.

هذه هي الخلفية الفكرية لمشكلة أرخميدس المتعلقة بحجم الكرة. مع أن هذه المشكلة شبيهة بمشكلة المخروط إلا أنها أصعب منها. الكرة تختلف عن المخروط حيث إنها مستديرة في جميع الاتجاهات. عبقرية أرخميدس كانت على مستوى التحدي.

ما هي طريقته؟ إنها تعتمد على تطبيق بارع لقانون الروافع. لقد اختار ذراعي الرافعة بحيث يتزن مقطع الكرة مع كل من مقاطع الاسطوانة والمخروط المماثلة. مع أنه سمى طريقته الطريقة الميكانيكية إلا أنه لم يتعامل مع المعادن ولم يحاول أن يحصل على اتزان بين قطعة معدنية وقطعتين أخريتين. لقد تعامل مع الأفكار وليس مع القصدير؛ طريقته كانت فكرية. لقد كانت سماكة مقاطعه ذرة واحدة ولكن ما سماكة الذرة؟ إنها نحيفة جداً. إنها صغيرة لدرجة أنها لو كانت أصغر لانعدمت تماماً. ماذا عمل أرخميدس؟ متجاهلا المنطق، استنتج أن العدد اللانهائي من المقاطع التي تملأ الكرة ستتزن مع كل من المقاطع اللانهائية التي تملأ الاسطوانة والمقاطع اللانهائية التي تملأ المخروط. واستنتج توازن المجسمات من توازن مقاطعها. يستطيع القارىء الحصول على التفاصيل في الجزء الأول من كتابي

Mathematics and Plausible Reasoning

وكذلك الجزء الثالث عشر من كتاب *A. Aaboe*

Episodes from the Early History of Mathematics

بقي أن نقول إن أرخميدس لم يترك الأمور بهذه الصورة. لقد استخدم الطريقة الميكانيكية ليكتشف قانون الكرة بعد هذا، أعطى برهاناً دقيقاً.

يجب ملاحظة أن مفهوم المقطع المتغير له تاريخ طويل. بعد أكثر من ألفي سنة نجد فكرة كافاليري *(Cavalieri)* حيث الانتقال من العنصر المتناهي الصغر إلى التكامل: فكرة الانتقال من $f(x)dx$ إلى $\int f(x)dx$

(٢ - ٢ - ٥) (-) . (-) = (+)

مع أن اكتشاف أرخميدس لحساب التكامل يعتبر أهم تطبيق لقانون الروافع، إلا أنه يوجد العديد من التطبيقات الممتعة. سأختار منها الإجابة على تساؤل طالب المدرسة: لماذا ناقص في ناقص تساوي زائدا؟

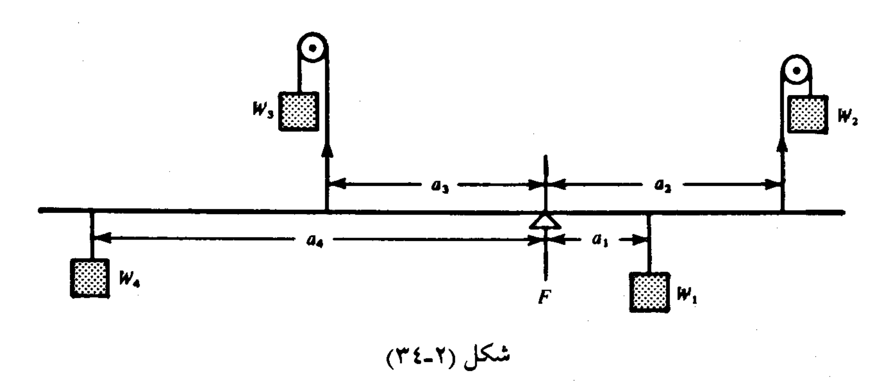
إحدى الإجابات على هذا السؤال هو البرهان الذي نحصل عليه من فرضيات وتعاريف علم الجبر. ولكن هذا ليس ما يريده التلميذ. التلميذ لا يقدِّر ولا يفهم هذا البرهان لأنه فوق مستواه.

أخوه الصغير الذي يتعلم العد، يريد أن يعرف كم ٤+٧. أمه تعطيه الجواب ولكنه يزعجها بسؤاله المتكرر «لماذا؟»، «لماذا؟»، «لماذا؟».

هل يريد موجز برهان ١+١=٢ كما ورد في كتاب وايتهيد ورسل *(Principia Mathematica)* ؟ أم أنه يريد أمثلة مقنعة على أن أربع تفاحات مع سبع

تفـاحـات تسـاوي إحـدى عشـرة تفـاحـة، وكذلك أمثلة مشابهة على البرتقال، على قوالبه الخشبية وأكواب وصحون أمه؟ أيَّ إجابة تختارها الأم المسكينة؟

بدون شك، تسـاؤلات تلميـذك أي الأخ الأكـبر وإن كانت أقـل تكراراً إلا أنها تطلب الكثـير. سؤالـه قد ينطـوي على عدة أسئلة، «كيف اكتشف؟»، «مـا هو استعـماله؟ ولكن بسؤالـه «لمـاذا ناقص في ناقص تسـاوي زائـداً؟» التلميـذ يريـد شيئاً ملموساً. الرافعة تحقق حاجته إلى مثال محسوس.



شكل (٢-٣٤)

خذ اتـزان رافعـة (عـديمـة الـوزن) تحت تأثـير الأوزان W_1 ، W_2 ، W_3 ، وW_4 عنـد المسافات a_1 ، a_2 ، a_3 و a_4 على الترتيب من نقطة الارتكاز F كما هو موضح في الشكل (٢-٣٤). الوزن إما أن يعمل على تدوير الرافعة حول F في اتجاه عقارب الساعة ↻ (كما تعمـل W_1 وW_3) أو تعمـل على التـدوير في الاتجاه المعاكس، عكس عقارب الساعة ↺ (كـما تعمـل W_2 و W_4). مقيـاس هذا العـزم الـدوراني يساوي حاصل ضرب الوزن وطول الذراع من نقطة الارتكاز إلى نقطة تأثير الوزن. باختصار

العــزم = الــوزن × الـــذراع

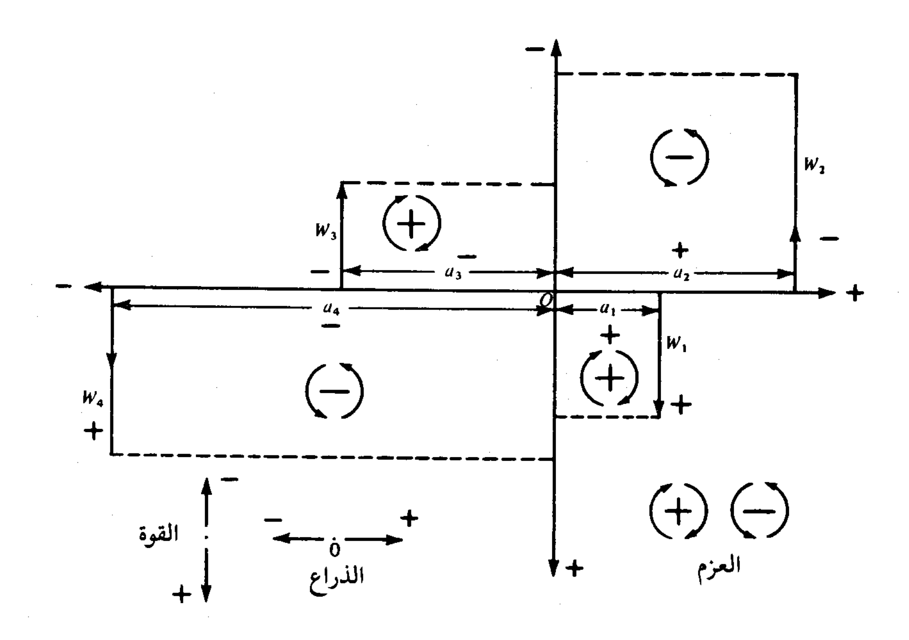
بدقة أكثر هذا العزم الدوراني يسمى العزم الساكن لتمييزه عن العزم الذي يظهر في علم الديناميكا. دعونا نأخذ العزم باتجاه عقارب الساعة موجباً والعزم بعكس اتجاه عقارب الساعة سالباً.

على ماذا تعتمد إشارة العزم؟ واضح أنها لا تعتمد على قيمة الوزن المستعمل، إن زيادة الوزن تزيد العزم ولكنها لا تغير إشارته. وكذلك لا تعتمد على طول الذراع، إذا قصرت فإن العزم يقل ولكن الإشارة لا تتغير. لكي نغير إشارة العزم يجب علينا أن نعكس اتجاه القوة مثل W وذلك باستخدام بكرة أوبتعليق الوزن على الاتجاه المعاكس لمحور الارتكاز. لكي نأخذ هذه الأمور في الاعتبار سوف نعتبر الوزن الذي يعمل إلى أسفل الرافعة (مثل W_1 وW_4) وزناً موجباً والوزن الذي يعمل إلى أعلى الرافعة سالباً (مثل W_2 وW_3). ولكي نفرق بين وزن يعمل إلى يمين محور الارتكاز (مثل W_1 وW_2) ووزن يعمل إلى اليسار (مثل W_3 و W_4) سنأخذ محور السينات على الرافعة حيث المركز في محور الارتكاز وحيث كل ذراع a قطعة مستقيمة موجهة. كالعادة نعتبر الاتجاه الأيمن من المركز موجباً والاتجاه المعاكس سالباً. إذن الأذرع a_1 و a_2 موجبة بينما a_3 و a_4 سالبة.

الشكل (٢-٣٥) يوضح إشارات الأوزان والأذرع في الشكل (٢-٣٤) وإشارات جميع العزوم. W_1 (موجب) ويعمل عند مسافة a_1 إلى يمين المركز (موجبة) ويدوِّر الرافعة باتجاه عقارب الساعة (موجب). إذا تذكرنا القط الذي اختفى بسرعة لدرجة أنه ترك تكشيرته وراءه نستطيع أن نكتب (+) = (+) . (+).

هناك خرافة وهي أن الرموز الرياضية يجب أن تكون دقيقة وكاملة. لكن اللغة بدون عامية وبدون حذف أي كلمة لا تطاق، إنها تجعل القارىء لا يعمل شيئاً سوى أن يستمع بصورة سلبية. الرياضيات مثل اللغة في هذا المجال. دعونا الآن نأخذ التكشيرات بدون القطط.

ما هي إشارة W_2 ؟ إنها سالبة. وإشارة a_2 ؟ أيضا موجبة. وحيث إن العزم هنا عكس عقارب الساعة، إذن (-)=(+) . (-) ونترك للقارىء أن يقنع نفسه أن W_4 و a_4 تعطيان (-)=(-) . (+) وكذلك W_3 و a_3 تعطيان (+)=(-)×(-).



شكل (٢-٣٥)

هل أثبتنـا قاعـدة الإشـارات؟ لا ، لم نستنتـج شيئاً من تعاريف وفرضيات الجبر . ولكننا حصلنـا على تفسـير حدسي لهذه القـاعـدة ، وأنهـا تطبق في الفيـزيـاء وفوق كل شيء جعلنا القـاعـدة ملمـوسـة . طبعـا أي كمية طبيعية مقدارها حاصل ضرب كميتين يمكن أن توضح القاعدة بشرط أن تأخذ كل كمية قيم موجبة وسالبة . ولكن هل يوجد شيء أبسط وأقرب إلى الـذهن من المثـال على الـرافعـة؟ وهـل هناك صعوبة في أن نتنبأ الآن كيف اكتشفت القاعدة ناقص في ناقص يساوي زائد .

(٢ ـ ٢ ـ ٦) مثلث فون ميسس للطيران (Von Mises Flight Triangle)

سبق أن درسنـا حالات توازن السطـح المـائل والبكرة والرافعة بواسطة المتجهات . مثالنا هنـا مسألـة من الديناميكا ولكنها سهلة لدرجة أننا نضيفها إلى دراستنا للتوازن . المشكلة هي تحديـد السـرعـة الهـوائيـة لطـائـرة . أولا ، ما المقصـود بالسرعة الهوائية؟ إننا لا نقصد السرعة

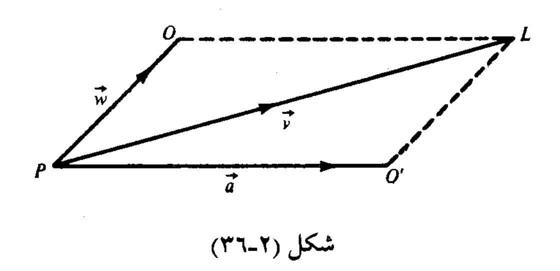
الأرضيـة. الأولى تعني سرعـة الطـائـرة بالنسبـة للهـواء الذي تطير من خلاله والأخيرة تعني السرعة بالنسبة للأرض التي تطير فوقها. التمييز هنا مهم جدا بالنسبة لمشكلتنا. دعونا نأخذ المثال التالي لتوضيح الموضوع.

لنفـرض أن طائـرة تطـير بسـرعـة ثابتة من سان فرانسيسكو إلى لوس أنجيليس في أربع ساعـات. لتسهيـل الحسـاب نفرض أن المسافة ٤٠٠ ميل. إذن السرعة الأرضية للطائرة هي ١٠٠ ميـل/ســا. أي أنهـا تصـل في نفس الوقت وبنفس السرعة التي تصل بها سيارة لو كانت مزودة بمحـرك قوي والطـريق من سان فرانسيسكـو إلى لوس أنجيليس غير مزدحم والبوليس غير منتبـه. واضـح أن الطـائـرة التي تسـايـر سيـارة منطلقة إلى لوس أنجيليس بسرعة ١٠٠ ميل/سا، تكون سرعتها الأرضية ١٠٠ ميل/سا أيضا.

لكن ما هي السرعة الهوائية للطائرة؟ هذا يعتمد على سرعة الهواء. إذا كان الهواء ساكناً فإن الطـائـرة تطـير عبر الهـواء بنفس السـرعة التي تطير بها بالنسبة للأرض. سرعتها الهوائية ١٠٠ ميل/سا وهي نفس السرعة الأرضية.

لنفـرض الآن أن السيـارة توقفت للتـزود بالـوقـود وأن الطـائـرة تطير ضد رياح معاكسة سرعتهـا ٢٠٠ ميـل/سـا. لكي تبقى الطائرة فوق السيارة الواقفة عند محطة البنزين عليها أن تطـير عبر الـريـاح بسرعة ٢٠٠ ميل/سا. مع أن السرعة الأرضية للطائرة الآن تساوي صفراً (مثـل سرعـة السيـارة)، إلا أن سرعتها الهوائية ٢٠٠ ميل/سا. عندما تواصل السيارة رحلتها من المحطة بسرعة ١٠٠ ميل/سا فإن على الطائرة أن تزيد سرعتها الهوائية إلى ٣٠٠ ميل/سا لكي تبقى فوق السيـارة. باختصـار، السـرعـة الهوائية للطائرة هي نفس السرعة الأرضية إذا كانت تطير في هواء ساكن.

دعونا الآن نستخدم المتجهات لتوضيح العلاقة بين سرعة الطائرة الأرضية $\vec{v}$ والسرعة الهوائية للطائرة $\vec{a}$ وسرعة الرياح $\vec{w}$. انظر الشكل (٢-٣٦). الوضع هنا شبيه بالقارب الذي يعبر النهر الذي ناقشناه سابقا.



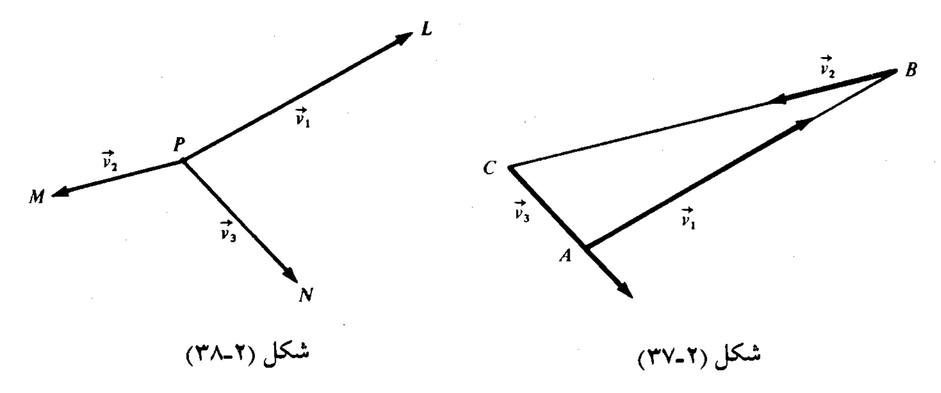
شكل (٢-٣٦)

بدون الرياح، تطير الطائرة من P إلى في دقيقة واحدة. بدون سرعة هوائية، يتحرك البالون في نفس الوقت مع الرياح من P إلى O . وكما رأينا سابقاً محصلة إزاحتين آنيتين هي نفس المحصلة لو كانت الإزاحات متتالية. وهكذا، يصبح المسار الفعلي للطائرة هو PL ؛ وسرعتها الأرضية $\vec{v}$ هي محصلة سرعتها الهوائية $\vec{a}$ وسرعة الرياح $\vec{w}$. كما نتوقع، عندما لا يكون هناك رياح (أي $\overrightarrow{PO}$ صفر وتنطبق L و O') فإن السرعة الأرضية الفعلية $\overrightarrow{PL}$ والسرعة الهوائية $\overrightarrow{PO'}$ للطائرة تصبحان متساويتين.

إذن لكي نحدد السرعة الهوائية لطائرة يكفي تحديد سرعتها الأرضية القصوى في يوم خال من الرياح. المشكلة أن الأيام الخالية من الرياح نادرة. صانعو الطائرات يريدون أن يربحوا ولذا لا يستطيعون أن ينتظروا لمدة ستة أشهر حتى يأتي يوم بدون رياح في منطقة شاسعة لكي يجربوا طائراتهم. قد تتساءل «لماذا الانتظار؟» إذا أمكن قياس $\vec{w}$ بدقة وكذلك $\vec{v}$ فإنه يمكن الحصول على $\vec{a}$ عن طريق قاعدة متوازي أضلاع السرعات. الصعوبة هنا هي قياس $\vec{w}$ بدقة. المشكلة العملية هنا هي تحديد السرعة الأرضية القصوى للطائرة في يوم خال من الرياح من السرعة الأرضية للطائرة في رياح سرعتها $\vec{w}$ وغير معلومة. إنها مشكلة كبيرة. لقد حل فون ميسس هذه المعضلة قبل حوالي خمسين سنة، إنني أذكر هذا الحل لأنني سمعته منه حينئذ.

الآن نشرح طريقته. تطير الطائرة بسرعتها القصوى من A وتتبع مسارا على شكل المثلث ABC ، مثلث الطيران (انظر الشكل (٢-٣٧))، حيث رؤوسه أماكن معلومة وتبعد عن بعضها بضعة مئات من الأميال. من أطوال الأضلاع AB ، BC وCA المعلومة، وبعد تعيين الوقت اللازم لقطع كل منها نستطيع حساب السرعة الأرضية لكل منها. ولكننا نعرف اتجاهات أضلاع المثلث أيضا، ولذا فإننا نعرف السرعات المتجهة الثلاث $\vec{v}_1$ ، $\vec{v}_2$ ، $\vec{v}_3$. وبما أن الطائرة طارت بسرعتها القصوى فإن سرعتها الهوائية a تمثل سرعتها الهوائية القصوى. كيف نحسب a من هذه المعلومات؟.

يجب ملاحظة أن أضلاع مثلث الطيران تمثل اتجاهات السرعات ولكنها (أضلاع المثلث) لا تحدد قيم السرعات إلا إذا لم يكن هناك أي رياح. سوف نستعمل أسهماً ثقيلة في الشكل (٢-٣٧) لكي تمثل الاتجاه وقيمة السرعة الأرضية. لنفرض أن الطائرة مثلا كانت تواجه رياحاً معاكسة أثناء الطيران على الضلع الأكبر BC . إذن السرعة الأرضية للطائرة على الضلع BC ستكون أقل منها على أي من الضلعين الآخرين بافتراض أن اتجاه وسرعة الرياح تبقى ثابتة. ولكن إذا كان طول الضلع الأكبر يمثل أقل سرعة أرضية فإن السرعات الأرضية الأكبر تحتاج إلى أضلاع أطول من الضلع الأكبر لتمثيلها.



شكل (٢-٣٨) شكل (٢-٣٧)

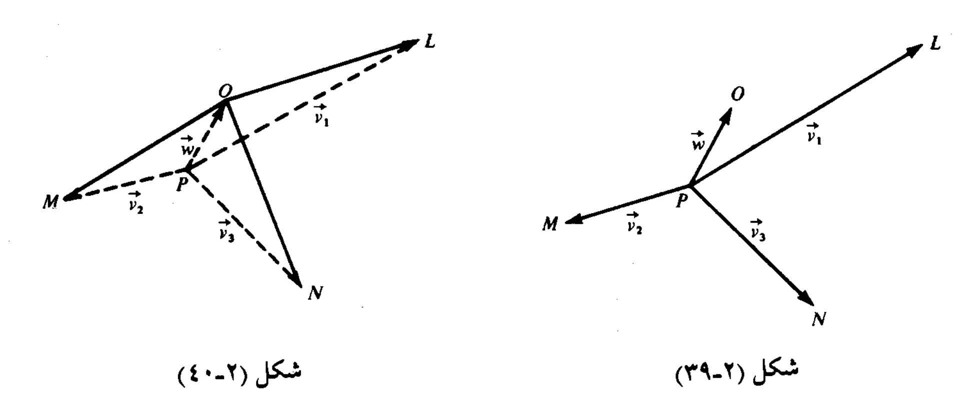
لكي نوضح المعطيات أكثر من ذلك، نرسم من نقطة مثل P ، المستقيمات PL ، PM ، PN لتمثل $\vec{v}_1$ ، $\vec{v}_2$ ، $\vec{v}_3$ على الترتيب. المتجهات الثلاث في الشكل (٢-٣٨) تطابق

الأسهم الثلاثة في الشكل (٢-٣٧) في القيمة والاتجاه. بمعنى أدق $PM//BC$ ، $PL//AB$ ، $PN//CA$.

كيف نستعمل هذه المتجهات لكي نحسب السرعة الهوائية القصوى a للطائرة؟ هل يمكن الحصول على متجه يمثل $\vec{a}$؟ مع الأسف، هذا غير ممكن. الطائرة تطير بسرعتها القصوى حول مثلث الطيران وهذا يعني أن سرعتها الهوائية a أي القيمة العددية للمتجه $\vec{a}$ ثابتة. هذا لا يعني أن اتجاه $\vec{a}$ ثابت. علينا أن نعيد التفكير.

هل من الممكن تمثيل الرياح بمتجه مثل $\vec{w}$ ؟ ألا يبدو أن هذا الاقتراح مفيد؟ تذكر أننا افترضنا أن سرعة واتجاه الرياح يبقيان ثابتين أثناء الطيران، ولذا فإن قطعة مستقيمة موجهة من P تمثل مركبة السرعة الأرضية في اتجاه كل من أضلاع مثلث الطيران الثلاثة. كما في الشكل (٢-٣٦)، نجعل PO القطعة الموجهة التي تمثل $\vec{w}$. ولكن انتظر؛ المتجه $\vec{w}$ ثابت ولكنه مجهول. فكر قليلا. هل نحجم عن التعامل مع المجهول x في الجبر حتى نعرف قيمته؟ لا، طبعاً، على العكس نضع المجهول x في المعادلة لكي نحسب قيمته. إذن نفعل الشيء نفسه بالمتجه $\vec{w}$. انظر الشكل (٢-٣٩). الشكل (٢-٣٦) يوحي بإكمال متوازي الأضلاع في الشكل (٢-٣٩) حيث PO ضلع وPL قطر. لكن في الشكل (٢-٣٦)، OL يوازي ويساوي PO'، وهذا يعني إمكانية تمثيل $\vec{a}$ بالمستقيم OL وبهذه الطريقة نستغني عن متوازي أضلاع المتجهات بمثلث المتجهات POL . إذن في الشكل (٢-٣٩)، $\overrightarrow{OL}$ متجه سرعة هوائية مجموعها مع $\vec{w}$ يعطي المحصلة $\vec{v}_1$. وماذا عن المثلثات POM وPON ؟ لقد ذكرنا أن $\overrightarrow{PO}$ يمثل مركبة السرعة الأرضية في اتجاه أي ضلع من مثلث الطيران. انظر الشكل (٢-٤٠).

لاحظ كيف تشتبك مثلثات المتجهات الثلاثة مع PO . ليس فقط $\vec{v}_1$ هي محصلة $\vec{w}$ وسرعة هوائية $\overrightarrow{OL}$، ولكن أيضا $\vec{v}_2$ هي محصلة $\vec{w}$ وسرعة هوائية $\overrightarrow{OM}$ وكذلك $\vec{v}_3$ محصلة $\vec{w}$ وسرعة هوائية $\overrightarrow{ON}$. ولكن الطائرة طارت حول مثلث الطيران بسرعتها القصوى. إذن قيمة سرعتها الهوائية a كانت ثابتة لجميع الأضلاع. إذن المتجهات $\overrightarrow{OL}$، $\overrightarrow{OM}$ و$\overrightarrow{ON}$ لها جميعا



شكل (٢-٣٩)

شكل (٢-٤٠)

نفس القيمـة (وليس نفس الاتجـاه). إذن O لها نفس البعـد عن L ، M وN ؛ إذن هي مركـز الدائرة المارة برؤوس المثلث LMN . إنشاء النقطة O يحدد a و$\vec{w}$.

هذا هو حل فون ميسيس الأنيق والبارع .

الفصل الثالث

من تاريخ الديناميكا

الاستاتيكا كما نعلم جزء من علم الميكانيكا يهتم بتوازن الأجسام، بينما تهتم الديناميكا بالحركة. الأول، كما لاحظنا يعود إلى اليونانيين: إلى اكتشاف أرخميدس لقانون الروافع وتطبيقه على حساب التكامل. الأخير جديد إلى حد ما، حيث إنه بدأ بجاليليو.

الجزء الأول: جاليليو

جاليليو *(Galileo Galilei)* يعرف باسمه الأول، اسم عائلته جاليلي. ولد في ١٥٦٤ وتوفي في ١٦٤٢. تاريخ وفاته مهم بالنسبة للذين يؤمنون بتقمص الأرواح. لم يتوف في نفس السنة التي ولد فيها نيوتن فحسب، بل توفي قبل أن يولد نيوتن بفترة قصيرة. التاريخ المهم هو ١٦٣٨ وهي السنة التي أتم فيها كتابه الشهير:

"The Dialogue Concerning Two New Sciences"

لقد سبقه الكثير من العباقرة أمثال أرسطو وليوناردو دافنشي وكانوا جميعاً مهتمين بدراسة حركة الأجسام الساقطة ولكن جاليليو كان أعظمهم في مجال الديناميكا. لقد ورث تعاليما لا تستند إلى حقائق وأنتج علماً حقيقيًّا.

يوجد قبره في مدينة فلورنسا في كنيسة سانتا كروس مع الفنانين ليوناردو وميخائيلنجلو والشاعر دانتي والسياسي مكيافيللي. أدواته موجودة في فلورنسا في متحف تاريخ العلوم، من

بينها التلسكوبات التي صنعها واستعملها بل واخترعها وأيضا أدواته لدراسة الديناميكا. فلورنسا مدينة مشوقة.

لقد أراد والده له أن يدرس الطب ولكنه سرعان ما مل هذه الدراسة. في تلك الأيام، الدراسة الجامعية كانت تنحصر في هضم كتب جالينوس(*Galen*) ومن ثم استرجاع هذه المعلومات لاجتياز الامتحان. لقد عاش جالينوس في الفترة ١٣٠-٢٠٠ ميلادي. وعبر أربعة عشر قرنا من الزمان، تجمعت في هذه الكتب الكثير من الخرافات والمعلومات التي لا تستند إلى دليل. في الطب يكفي الاستشهاد بجالينوس كما يكفي الاستشهاد بأرسطو في كل شيء آخر تقريبا. بالنسبة لجاليليو الاستشهاد بآراء الآخرين لا يكفي، ولذا فقد حول إلى الرياضيات.

(٣ - ١ - ١) الأجسام الثقيلة تسقط أسرع؟

لقد ركز أرسطو على أهمية الملاحظة ولكنه لم يلاحظ جيدا في الميكانيكا. من المعروف بالنسبة للذين يتسلقون الجبال وغيرهم أن الأجسام الحرة تسقط إلى الأرض. وحسب ملاحظة أرسطو العابرة، الأجسام الثقيلة تسقط أسرع من الأجسام الخفيفة، ولكن جاليليو حاول أن يبرهن العكس.

لنفرض جسمين W وw يسقطان من السكون ويكتسبان السرعتين V وv على الترتيب بعد وحدة الزمن. حسب أرسطو، إذا كان W أكبر من w فإن V ستكون أكبر من v. ويتساءل جاليليو «ماذا يحدث إذا اتحد الجسمان؟» لتكن U سرعة الجسم الموحد $W+w$ بعد وحدة الزمن. بما أن w يسقط بسرعة أقل من W، فإن الجزء w من $W+w$ لا بد أن يؤخر الجزء W. أي أن U أقل من V. لكن $W+w$ أكبر من W وحسب فرضية أرسطو فإن U أكبر من V. إذن U أصغر وأكبر من V، أي أن $W+w$ يسقط بسرعة أقل وأكبر من W. هذا غير معقول.

ماذا فعل جاليليو؟ لقد قال ما معناه إن لدينا هنا قانوناً ممكناً تسنده ملاحظة ضعيفة. هل القـانـون منسجم مع نفســه؟ وبرهن أنه غير منسجم. إذن فهو غير مقبول في الرياضيات ولا يمكن أن يكون أحد عناصر دراسة الظواهر الطبيعية.

كانت حجـة جاليليـو مهمـة حيث إنهـا جعلت الكثـير من معـاصريه قلقين. لقد تكلم وكتب بفعالية اللسان والقلم. مثل والده، كان جاليليو مشاكساً مولعا بالجدل، سريع الخاطر ومنطقي التفكير ـ كل هذا جعل خصومه يظهرون سذجا بحججهم الباطلة. جاليليو لم يحبب نفسه للجميع.

(٣ ـ ١ ـ ٢) ليس «لماذا؟» ولكن «كيف؟»

لماذا؟ لماذا هذا؟ لماذا ذاك؟ تلك هي الأسئلة التي سألها الراعي الطيب أرسطو وثغت بها أغنـامـه عبر القـرون. لماذا تسقط الأجسام الثقيلة؟ ويجيب أرسطو «لأن كل جسم يبحث عن مكانه الطبيعي». إنه يناقش كما لو كان الجسم غير الحي حيوانا يبحث عن مثيله. هل تنيرك كثيرا هذه الحجة؟ طبعا لا، لأنك ولدت في العصر الحديث؛ جاليليو لم يولد في هذا العصر. كان عليــه أن ينـاقش المـوضـوع. جاليليـو كان حديثـاً في تفكـيره بشكـل مرعب وتسـاءل: ليس «لمـاذا؟» ولكن «كيف؟». بسؤ الـه هذا كان يطلب وصفـاً دقيقـاً للظـاهـرة وليس تشبيهاً تأمليـا. سؤ الـه كان «كيف تسقط الأجسام الحرة؟» وراء سؤ اله هذا، كان معتقده الأساسي وهـــو أن كتـاب الطبيعـة العظيم مكتـوب بلغـة الـريـاضيـات (انظـر الشعـار على الغـلاف الخارجي). هدفه كان قانوناً رياضياً دقيقاً ولا أقل من ذلك.

(٣ ـ ١ ـ ٣) كيف تسقط الأجسام الثقيلة؟

جاليليـو سأل السؤ ال من النـوعيـة المنـاسبـة. أخيرا سأل السؤ ال الصحيح من النوعية المناسبة وأعطى الإجابة الصحيحة. وهكذا وضع الأساس لعلم جديد.

كيف تسقط الأجسام الثقيلة؟ كلما زادت المسافة زادت السرعة. حتى أبسط الناس يلاحظ أن السرعة تزداد مع المسافة التي يسقطها الجسم. نحن نعلم جميعاً أن المطرقة تسقط بقوة إذا سقطت من مسافة عالية. واضح أن حركة السقوط الحر تتسارع. إذن ما هو القانون الرياضي الذي يربط السرعة بالمسافة؟ ما هو أبسط تخمين؟ هل سرعة الجسم الساقط تتناسب طردياً مع المسافة التي سقطها الجسم؟ هذا هو سؤال جاليليو الأول. إنه سؤال من النوعية المناسبة.

من المحتمل أن ليوناردو وآخرين قبل جاليليو أثاروا أسئلة مشابهة، الفرق هو أن جاليليو أخذ الموضوع بجدية. بعد سنوات من التأمل توصل إلى أن هذا التخمين غير ممكن؛ إنه يؤدي إلى تناقض وهو أن السقوط الحر لا يمكن أن يبدأ. لقد توصل إلى هذه النتيجة عن طريق مناقشة دقيقة وبارعة تستحق الإعجاب ولكننا لن نناقشها هنا. بالأساليب الرياضية الحديثة نستطيع أن نعطي برهاناً بسيطاً يعتمد على المعادلات التفاضلية كما سنرى في البند (٥-١-٢). إذن تخمين جاليليو المبني على أن السرعة تزداد مع المسافة غير ممكن. السقوط لا يمكن أن يبدأ. كان على جاليليو أن يفكر مرة أخرى. ولكن لا يمكن إغفال حقيقة أن سرعة السقوط تتزايد مع الوقت. السقوط الحر يتسارع مع الوقت وكذلك مع المسافة. إذن ما هو القانون الرياضي الذي يربط السرعة بالوقت؟ ما هو أبسط تخمين؟ هل هو أن السرعة تتناسب طرديا مع الوقت؟ هذا هو سؤال جاليليو الثاني. لقد تبين أنه السؤال الصحيح من النوعية المناسبة. كيف تحقق جاليليو من تخمينه هذا عمليا؟ تذكر أن جاليليو لم يكن لديه أدوات كهربائية ضوئية تمكنه من التعامل مع الحركة في جزء من الثانية. إذا أوقفنا جسماً يتحرك لنأخذ نظرة فاحصة فإننا ندمر السرعة التي أردنا ملاحظتها. ولكن لا داعي للحرص على قياس المسافة، يمكن عمل هذا فيما بعد وبدقة. كان على جاليليو أن يستخلص قانون المسافة والزمن الذي يتضمن أن السرعة تتناسب طرديا مع الزمن ومن ثم يبرهن العلاقة الأخيرة مباشرة من الأولى.

لكي نفهم كيف تحقق جاليليو عمليا من تخمينه، علينا أن نسأل كيف استنتج العلاقة بين المسافة والزمن والتي يتضمنها تخمينه. لتبسيط العملية سنعمل مثل جاليليو وليس أرسطو. سنستخدم أشكالا بمحاور إحداثية أو الرموز الرئيسية للغة الرياضيات كما يسميها جاليليو. بحث جاليليو في الديناميكا كان ماديا أما بحث أرسطو فكان ميتافيزيقيا. ولكن على عكس جاليليو لدينا الآن الرموز الجبرية المريحة. لو اكتشفت هذه الرموز في عصره، لمكنته من التعمق أكثر في دراسة الديناميكا.

لنفرض أن جسما ثقيلا يكتسب السرعة v بعد سقوطه مدة t. حسب فرضية جاليليو v تتناسب مع t، أي أن

$$v = const \times t$$

القيمة العددية للثابت تعتمد على الوحدات التي نستخدمها للسرعة v والزمن t ونرمز في وقتنا الحاضر للثابت بالرمز g. وهذا الرمز يأتي من كلمة جاذبية *(gravity)*. ويصبح تخمين جاليليو

$$v = g.t \qquad (١)$$

لكن المسافة s التي يسقطها الجسم من السكون في الزمن t تعتمد على t، s تعتمد على t

$$s = f(t) \qquad (٢)$$

كان على جاليليو أن يحدد (٢) من (١).

كيف حل المشكلة؟ ببراعة فائقة حيث اعتبر الحركة التسارعية غير المنتظمة حالة نهائية لحركات منتظمة غير متسارعة.

خذ الحـركـة المنتظمـة . إذا قُدت السيـارة لمدة ساعتين بسرعة ثابتة 40 ميل / ساعة فإنك تقطع مسافة 80 ميلا .

$$80 = 40 \times 2$$

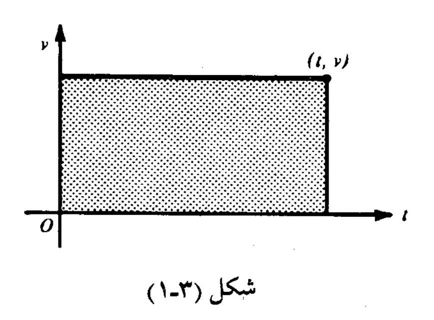
بصورة عامة

المسافة = السرعة المنتظمة × الزمـــن

وجبر يـــا

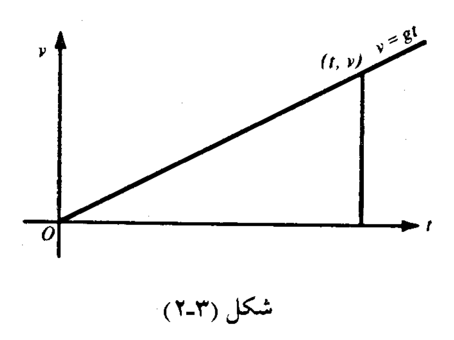
$$s = v \times t \qquad (٣)$$

حيث v ثابتة . انظر الشكل (٣-١) للتمثيل البياني . الاحداثي الصادي v ثابت ، إذن التمثيل البيـاني للسـرعـة v خط مستقيم موازي لمحـور الـزمن . لاحـظ أن المسـاحة الواقعة تحت هذا المنحنى ، أي مسـاحـة المستطيـل المظلل تسـاوي $v \times t$. إذن من (٣) المسـافـة المقطـوعـة تمثل بالمساحة التي تحت المنحنى حينما تكون السرعة منتظمة . نعم ، إنها ملاحظة واضحة ولكنها في نفس الوقت هامة .



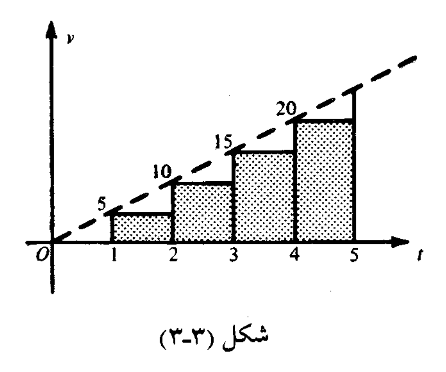
شكل (٣-١)

الآن نأخـذ الحـركـة غير المنتظمة . ما هو الرسم البياني لـ (١)؟ هذه المعادلة من الصورة $y = mx$ حيث v بدلا من y وt بدلا من x وg بدلا من m. إنـه خط مستقيم يمـر بنقطـة الأصـل وميله g. انظر الشكل (٣-٢) .



شكل (٣-٢)

لماذا سرعـة الجسم السـاقـط الحـر ليست منتظمـة؟ لأن سرعته تتزايد باستمرار. السيارة المتسـارعـة، على سبيـل المثـال، لا تسير بسرعة صفر قدم/ثا في الثانية الأولى و٥ قدم/ثا في الثـانيـة الثـانيـة و١٠ قدم/ثـا في الثانية الثالثة و١٥ قدم/ثا في الثانية الرابعة وهلم جرا. على العكس، دعونا مؤقتا أن نفترض سرعة تزداد بمعدل ثابت وتتميز بهذه التقطعات من الحركة المنتظمة. هذا التشويه الغريب للحقيقة موضح في الشكل (٣-٣).



شكل (٣-٣)

في الثانية الأولى تقطع السيارة مسافة صفر من الأقدام، بعد ذلك بقفزة مفاجئة تتسارع إلى ٥ قدم/ثـا. بعـد ثانيـة من القيـادة الهادئة بهذه السرعة الثابتة نقفز فجأة إلى السرعة ١٠ قدم/ثا. يتبع هذا قيادة ولمدة ثانية بسرعة ١٠ قدم/ثا، قفزة إلى ١٥ قدم/ثا وبعد ثانية قفزة أخـرى إلى ٢٠ قدم/ثـا وهكـذا. المسـافـات المقطـوعـة في الفترات المتتالية ممثلة بمساحات المستطيلات المتتالية. (المستطيل الأول ارتفاعه صفر). المسافة الكلية تساوي المساحة الكلية للمستطيلات المظللة.

لنفرض أننا نصفنا التسارعات والفترات الزمنية. في الخمس ثواني الأولى تكتسب السيارة بعد كل نصف ثانية السرعات صفر، ٢/١٢، ٥، ٢/١٧، ١٠، . . . ، ٢٠، ٢/١٢٢ قدم/ثا على التوالي. ارسم هذا لنفسك برسم مثل الشكل (٣-٣). القفزات وإن تضاعفت إلا أنها أقل عنفاً بمقدار النصف حيث إن الزيادات المفاجئة في السرعة أصبحت ٢/٥ قدم/ثا فقط بدلا من ٥ قدم/ثا.

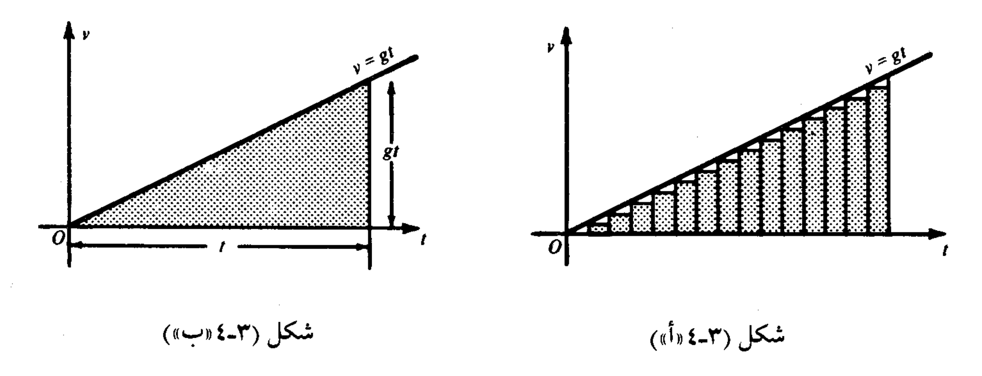
لنفرض الآن أن هذه التسارعات والفترات الزمنية نصفت مرة أخرى. مع أن القفزات تتكرر بسرعة أكبر من السرعة الأصلية بأربع مرات، إلا أنها أقل عنفاً بمقدار الربع حيث إن الزيادات المفاجئة في السرعة أصبحت الآن ٤/٥ قدم/ثا بدلا من ٥ قدم/ثا. إذا ازدادت القفزات ثمان مرات، أصبحت أقل عنفاً بمقدار الثُّمن؛ الزيادات المفاجئة في السرعة تصبح ٨/٥قدم/ثا بدلا من ٥ قدم/ثا. عندما تكون الفترات $\frac{1}{2^n}$ من الثانية حيث n كبيرة فإن القفزات تصبح خفيفة حيث إن قفزات السرعة أصبحت $\frac{5}{2^n}$ قدم/ثا فقط. كلما زادت n، كلما مهدنا رحلتنا. إذا جعلنا n كبيرة بصورة كافية فإن هدوء رحلتنا سيختلف بصورة غير محسوسة عن انزلاق السيارة التي تتزايد سرعتها بصورة متصلة وبمعدل ثابت. إذا أصبحت n كبيرة جدا، فإن تشويهنا الغريب للسرعة المتصلة المتزايدة يقترب من الحقيقة بقدر ما نريد.

طبعا هذه الملاحظة تنطبق على الأجسام الساقطة الحرة. ماذا يحدث للشكل (٣-٣) والشكل الذي رسمته لنفسك عندما تكبر n؟ عندما تتزايد المستطيلات تصبح نحيلة وتملأ بصورة أفضل المساحة التي تحت المنحنى $v = g.t$. بجعل n كبيرة بشكل كافي نقترب من ملء المساحة كلها. انظر الشكل (٣-٤). لماذا تمثل المساحة التي تحت المنحنى في الشكل (٣-٢) [أي المساحة المظللة في الشكل (٣-٤)«ب»] المسافة الكلية المقطوعة في الزمن t بواسطة جسم ثقيل يسقط من السكون؟ بالرغم من أن الحركة غير منتظمة إلا أن المسافة المقطوعة تمثل

بالمساحة التي تحت المنحنى مثل الوضع في الحركة المنتظمة. لكن المساحة التي تحت المنحنى مثلثية قاعدتها t وارتفاعها gt. إذن

$$s = \frac{1}{2}t \times gt$$

$$s = \frac{1}{2}gt^2. \quad (٤)$$



شكل (٣-٤«ب») شكل (٣-٤«أ»)

هذه هي الطريقة التي استنتج بها جاليليو $f(t)$ في المعادلة (٢). هذا هو القانون الذي يربط المسافة بالزمن والذي ينتج من ملاحظة أن السرعة تتناسب طردياً مع الزمن. أليس جلياً أنه إذا كانت المساحة التي تحت المنحنى $\frac{1}{2}gt^2$ لكل قيم t، فإن معادلة المنحنى تكون $v = gt$؟ المسافة المقطوعة تتناسب مع مربع الزمن وليس مع الزمن كما خمن جاليليو في البداية. بإثباته للأول ونفيه للأخير، يكون جاليليو قد بحث في جانبين مهمين من حساب التفاضل والتكامل.

الصعوبة الأساسية التي واجهها جاليليو أنه لم يتمكن من «تجميد» حركة الجسم الساقط ليتفحص سرعته الآنية وكان اعتقاده أن قياس المسافات أسهل من قياس السرعات. مشكلته الأخيرة هي التحقق من (٤) عمليا ومنه يكون قد أثبت (١) بصورة غير مباشرة. كيف أنجز هذا؟

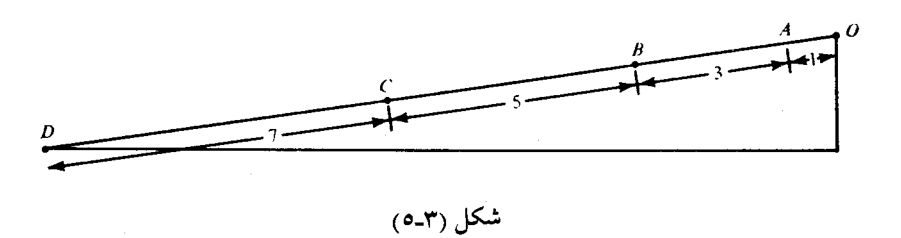
خذ الجدول التالي :

t	المسافة المقطوعة في t ثانية = $\frac{1}{2}\,gt^2$	المسافة المقطوعة في ثواني متتالية
0	0	
1	$\frac{1}{2}\,g\cdot 1$	$\frac{1}{2}\,g\cdot 1$
2	$\frac{1}{2}\,g\cdot 4$	$\frac{1}{2}\,g\cdot 3$
3	$\frac{1}{2}\,g\cdot 9$	$\frac{1}{2}\,g\cdot 5$
4	$\frac{1}{2}\,g\cdot 16$	$\frac{1}{2}\,g\cdot 7$
5	$\frac{1}{2}\,g\cdot 25$	$\frac{1}{2}\,g\cdot 9$

نسبة المسافات المقطوعة في الفترات الزمنية المتساوية المتتالية هي : $1:3:5:7:9$ الخ .

إذن إذا سقط جسم ثقيل من أعلى جدار ومر من علامة تمثل وحدة المسافة بعد ثانية واحدة فإنه يصل علامة الثلاث وحدات إل أسفل في نهاية الثانية الثانية ويصل إلى علامة الخمس وحدات بعد ثلاث ثوان وهكذا . ولكن الأجسام تسقط بسرعة وحتى هذه الملاحظات يصعب التأكد منها، وعلى الرغم من الأسطورة المعروفة فإن جاليليو لم يسقط قذائف من برج بيزا المائل. أليس في الإمكان إبطاء الحركة لتسهل الملاحظة؟ أي تخفيض في قيمة $\frac{1}{2}\,g$ لن يغير النسب. الحائط الرأسي حالة نهائية للمستوى المائل، أليس من المتوقع أن تصح النسب في حالة الحركة على سطح مائل؟ على العكس من السطح الرأسي ، المائل يأخذ جزءاً من وزن الجسم المنزلق على سطحه ولذا يقلل من تسارع الجسم . كلما صغرت زاوية الميل α كلما قلت الحركة .

لقد جرب جاليليو. انظر الشكل (٣ـ٥) . فوجد أن الكرة المتدحرجة من O والتي تقطع المسافة بين O وA في وحدة الزمن ، سوف تقطع كلا من المسافات AB ، BC ، CD في وحدة الزمن أيضا. لقد وجد أن هذه الظاهرة لا تتأثر بزاوية الميل . وهكذا دلل على جوابه الصحيح لسؤ اله الصحيح (انظر الفقرة الأخيرة من البند ٣ـ١ـ٧) .



شكل (٣-٥)

(٣ - ١ - ٤) ديناميكا السطح المائل

عندما تصبح زاوية الميل α صفراً فإن السطح يصير أفقيا والجسم الذي فوقه لا يتحرك، السطح يحمل كل الوزن. كلما زادت الزاوية α، زادت سرعة السقوط وصغر حجم الوزن المحمول من قبل السطح. أخيراً، عندما تصير $\alpha = 90°$ فإن السطح لا يحمل أي وزن ويحدث السقوط الحر. واضح أن الوزن الذي يتحمله السطح يعتمد على الزاوية α مثله مثل شرط اتزان جسم على السطح. شرط الاتزان معروف لدى جاليليو إما عن طريق ستيفينوس أو أنه اكتشفه بنفسه وهذا ساعده في استنتاج علاقة الوزن الذي يتحمله السطح بزاوية الميل. طريقته تعتمد على استخدام ضمني لقانون متوازي أضلاع القوى.

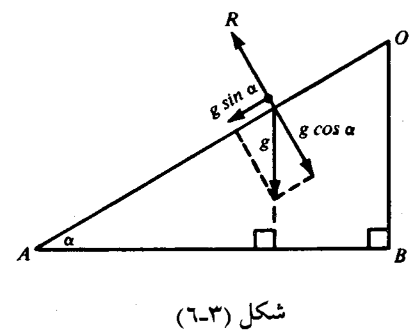
في البداية، ما الذي يجعل الجسم يتسارع؟ نعم، القوى المؤثرة عليه، كلنا نعلم أنه من أجل زيادة سرعة السيارة، لنتسارع، علينا أن «نضغط على البنزين» كما نقول. الماكينة تعطي قوة أكبر. ما هي القوة التي تجعل الجسم الساقط الحر يزيد من سرعته باستمرار؟ نعم، إنها جاذبية الأرض، أي وزنه. إننا نعرف الآن مالا يعرفه جاليليو وهو أن تسارع الجسم الساقط على سطح القمر يساوي سدس التسارع على الأرض. مع أن مادة الجسم لا تتغير بنقله من القمر إلى الأرض إلا أن وزنه يزيد ستة أضعاف. وزنه على القمر أقل لأنه في مجال جاذبية أضعف. هناك، بسدس الجهد فقط تستطيع تسلق الصخور. وعندما نسقط فذلك بسدس التسارع الأرضي. السقوط الحر - تسارعه - يتناسب مع القوة المؤثرة - وزنه.

ما هي g في المعادلة (١)؟ خذ الشكل (٣-٢)، الرسم البياني لهذه المعادلة. ما هي m في $y= mx$؟ نعم، m هي الميل. بصورة أوضح، m هي نسبة التغير في الإزاحة الرأسية إلى

التغير في الإزاحة الأفقية. إذن g نسبة الزيادة في السرعة إلى الزيادة في الزمن. لكن المنحنى خط مستقيم، منحنى بميل ثابت، إذن النسبة g ثابتة بغض النظر عن التغير في الزمن. باختصار، g هي المعدل الثابت للتغير الآني للسرعة بسبب الجاذبية أي التسارع.

نلخص ما سبق ونقول إن g في المعادلة (١) هي ثابت الجاذبية وقياس مجال الجاذبية الأرضي. القوة المؤثرة على جسم ما بواسطة الأرض، القمر أو أي مجال جاذبية آخر يتناسب مع ثابت ذلك المجال.

على هذا الأساس، دعونا نأخذ g كمقياس للقوة المؤثرة رأسيا إلى أسفل على جسم على سطح مائل. انظر الشكل (٣-٦). حيث إننا نفترض أن السطح المائل أملس فإن التأثير الوحيد لرد فعل السطح R يكون عموديا على سطحه. ولكن إذا تذكرنا البند (٢-٢-١) فإنه بالإمكان تحليل المتجه g إلى القوة $g \cos \alpha$ العمودية على السطح (ولذا فهي مساوية ومعاكسة للقوة R حيث إنه لا يوجد حركة عمودية على السطح) والقوة $g \sin \alpha$ إلى أسفل المستوي المائل. ولذا تصبح الحركة الحرة إلى أسفل مائل أملس مجرد حركة جسم «يسقط» في مجال جاذبية $g \sin \alpha$ (بدلا من g) والتي تعمل في اتجاه OA (بدلا من الاتجاه الرأسي إلى أسفل).



شكل (٣-٦)

حيث إن مجال الجاذبية $g \sin \alpha$ بدلا من g فإننا نستبدل

$$v = g \cdot t \qquad (١)$$

بالمعادلة

$$v = g \sin \alpha \cdot t. \qquad (`١)$$

ولكن

$$s = g \cdot \tfrac{1}{2} t^2 \qquad (٤)$$

نتيجة للمعادلة (١)، إذن

$$s = g \sin \alpha \cdot \tfrac{1}{2} t^2 \qquad (`٤)$$

نتيجة لـ (`١). إذا أخذنا $t = 0,1,2,3,...$ فإن الإزاحات إلى أسفل المستوى المائل في فترات الوحدة الزمنية المتتالية تتناسب مع $1:3:5:7:...$ كما نتوقع.

هذا يكمل شرحنا لاستنتاج جاليليو للمعادلة (`٤). لقد كانت معالجته الأصلية أقل وضوحاً.

من العلاقة (١) بين v وt للسقوط الحر، توصل جاليليو كما رأينا، إلى العلاقة (٤) بين s وt. وتساءل أيضا عن العلاقة بين v وs. الجواب على هذا السؤال يكمن في حذف t من (١) و(٤). بقسمة (١) على g وبالتربيع نصل إلى

$$\frac{v^2}{g^2} = t^2.$$

بالتعويض عن t^2 في (٤) نجد

$$s = \frac{1}{2} g \cdot \frac{v^2}{g^2} = \frac{v^2}{2g},$$

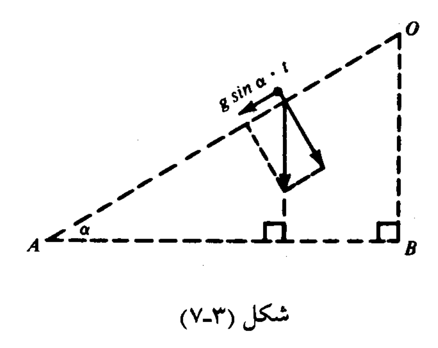
ومنه

$$v^2 = 2gs. \qquad (٥)$$

بعـد ذلـك، سأل نفس السؤال للحـركـة الحرة إلى أسفل مستوى مائل بزاوية α . إذا تذكرنا أن (١`) شبيهة بـ (١) و(٤`) شبيهة بـ (٤) في أن الزوج الأخير هونفس الزوج الأول لولا العامل $\sin \alpha$ ، ماذا تتوقع للحركة إلى أسفل المستوى المائل؟ ألا تتوقع أن تكون معادلة (٥`) شبيهة بـ (٥) مثل شبه (١`) بـ (١) و(٤`) بـ (٤)؟ نعم، ونخمن أيضاً أن

$$v^2 = 2g \sin \alpha \cdot s. \qquad (٥`؟)$$

علينا أن نختبر هذا التخمين.



شكل (٣-٧)

إشـارة إلى الشكـل (٣-٧)، نفـرض أن جسـماً يبـدأ من السكـون عنـد O ، أي أن سـرعـته $v = O$ ، $s = O$ و $t = O$ ويصل إلى A في أسفل المستوى المائل بسرعة V بعد ن قطع المسافة S من O إلى A في الزمن T. بالمعادلة (١`)

$$V = g \sin \alpha \cdot T,$$

ومن (٤`)

$$S = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot T^2.$$

بقسمة الأولى على $g \sin \alpha$ وبالتربيع نحصل على

$$\frac{V^2}{g^2 \sin^2 \alpha} = T^2,$$

بالتعويض عن T^2 في العلاقة السابقة نجد أن

$$S = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot \frac{V^2}{g^2 \sin^2 \alpha} = \frac{V^2}{2g \sin \alpha},$$

إذن

$$V^2 = 2g \sin \alpha \cdot S. \qquad (٥`)$$

هذه هي (٥`؟) بعد التغيير المناسب في الرموز. لقد تحقق تخميننا. المعادلة (٥`) لها نتيجة هامة وحيوية في مجال الديناميكا. في الشكل (٣-٧)، ليكن $H = OB$ ، الهبوط الرأسي الكلي أثناء الانزلاق على OA . بما أن $OA = S$ فإننا نحصل على

$$\sin \alpha = \frac{H}{S}.$$

بالتعويض عن $\sin \alpha$ في (٥`)، نجد

$$V^2 = 2g \cdot \frac{H}{S} \cdot S,$$

أي أن

$$V^2 = 2gH. \qquad (٦)$$

أليست الإجابة على سؤال جاليليو مدهشة حقا؟ المعادلة (٦) لا تشير أبدا إلى طول المستوى المائل ولا إلى زاوية ميله. مربع السرعة ـ وكنتيجة السرعة نفسها ـ مستقلة عن هذه

الأشياء. السرعة المكتسبة تعتمد فقط على الارتفاع الذي يسقط منه الجسم. وحيث إن السرعة المكتسبة مستقلة عن α ، فإننا نتوقع أن ينطبق القانون حتى عندما تكون $\alpha = 90°$ ، أي في حالة السقوط الحر. وهذا يحدث فعلا. أليست (٦) هي نفسها (٥) لولا الاختلاف في الرموز؟ الآن نرى أن (٦) وليست (٥`) هي النظير الحقيقي للمعادلة (٥). إن أسئلة الرجال الرائعين يكون لها إجابات رائعة، حتى جاليليو كان مندهشا.

(٣ ـ ١ ـ ٥) حفظ الطاقة

من (٦) نجد أن

$$\tfrac{1}{2} V^2 = gH,$$

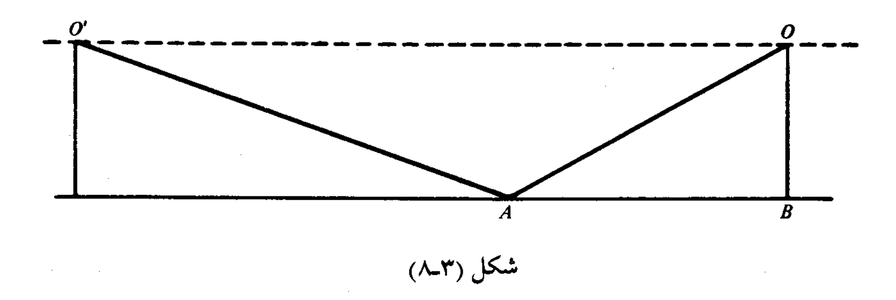
وإذا أدخلنا الكتلة m والتي جذب الأرض لها يساوي mg ، فإننا نجد أن

$$\tfrac{1}{2} mV^2 = mg \cdot H. \qquad (٧)$$

ولكن ما هي $\tfrac{1}{2} mV^2$ ؟ إنها الطاقة الحركية. وما هي $mg.H$ ؟ mg هي قوة الجاذبية على الجسم m ، ومنه فإن $mg.H$ يمثل الشغل ضد الجاذبية عندما نرفع الكتلة m إلى ارتفاع H. عندما ترفع إلى هذا المكان وإن كانت ساكنة إلا أن لها القدرة على الحركة. إن لها طاقة كامنة. عندما تُتْرك m لتسقط، فإن طاقتها المخزونة تستخدم لتعطي الحركة وما كان كامناً يصبح حركيًا. خسارة الأول هي ربح الأخير. لا يوجد خسارة إجمالية، مجموع الطاقة المستعملة والجاهزة للاستعمال يبقى ثابتا؛ الطاقة محفوظة.

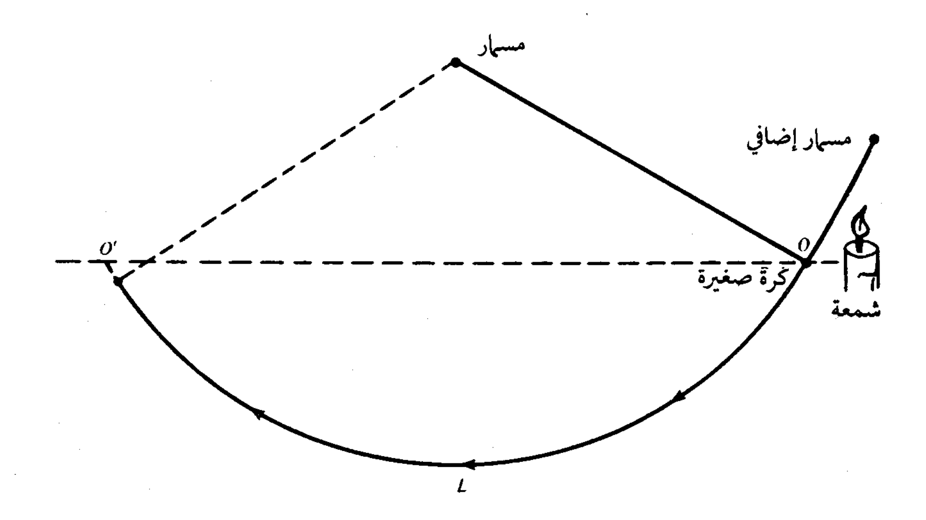
مع أن جاليليو أوشك على صياغة هذا المفهوم، إلا أنه فاته ـ وكذلك فات من جاء بعده لمدة قرنين. لقد قدَّر جاليليو نتائج (٦) ولم يقدر نتائج (٧). كان يعلم أن حركة (٦) قابلة للعكس، بمعنى أنه إذا انزلق جسم على مستوى أملس من حالة السكون فإنه يفقد ارتفاع

H عندما يصل إلى القاع بسرعة V ، وإذا قذف الجسم من القاع بسرعة V فإنه يصل إلى أعلى السطح الذي ارتفاعه H . لقد تحقق من هذا بجعل جسم ينزلق على مستوى مائل ومن ثم يصعد على مستوى آخر له نفس الارتفاع . انظر الشكل (٣ـ٨) .



شكل (٣ـ٨)

لكي يمنع الجسم المنزلق على المستوى المائل من أن يضغط على حرف اللوح الثاني عند A ، كان من الضروري أن يدوِّر الركن عند A. وبما أن الظروف الحقيقية أقل من الوضع المثالي فإنه يبقى بعض الاحتكاك على الرغم من استخدام السطوح المصقولة الملساء . الجسم من O لا يصل تماماً إلى O' . لو أمكن هذا لعاد الجسم إلى O ثم إلى O' وهكذا . الحركة



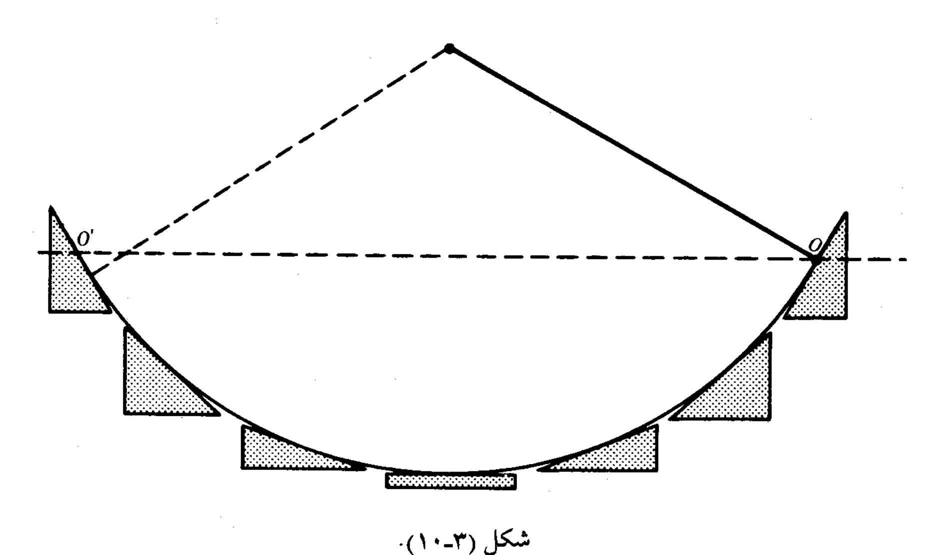
شكل (٣ـ٩)

الأبـديـة شيء مثـالي لا حقيقـة له . هذه الحقيقـة تذكرنا بأن غياب الاحتكاك شرط ضروري لحفظ الطاقة . الاحتكاك يجعل بعض الطاقة الكامنة تتحول إلى حرارة وليس طاقة حركية .

لكي يتخلص من الاحتكـاك قام جاليليـو بتجـربـة تعتـبر بحق تجربـة كلاسيكية . ماذا نحتـاج عدا العبقـريـة الـلازمـة للتفكـير فيها؟ نحتاج إلى مسمارين وخيط وكرة ثقيلة وشمعة مشتعلة . انظـر الشكـل (٣-٩) . لماذا الشمعـة؟ لكي تحرق الخيـط ولـذا ينطلق البنـدول من السكـون . مع أنـه يمكن إطـلاق البنـدول باليـد وبـدقة ، إلا أنه ممكن جدا أن يسحب المرء البندول أو يرفعه بدون قصد : الهدف هو أن نجعل البندول يبدأ الحركة بنفسه . ماذا يحدث؟ تتحرك الكرة من O إلى L ثم إلى أعلى وتقترب من نفس المستوى عند O' . إنها تقترب من نفس المستـوى لا تصله تمامـاً لأنـه يوجـد بعض الاحتكـاك بين الخيـط غير المرن تماماً والمسمار وكـذلـك احتكـاك الهـواء مع الكـرة والخيـط . بتفادي المستويات المائلة حيث الاحتكاك كبير نسبيا ، استطاع جاليليو بهذه التجربة الاقتراب من الظروف المثالية .

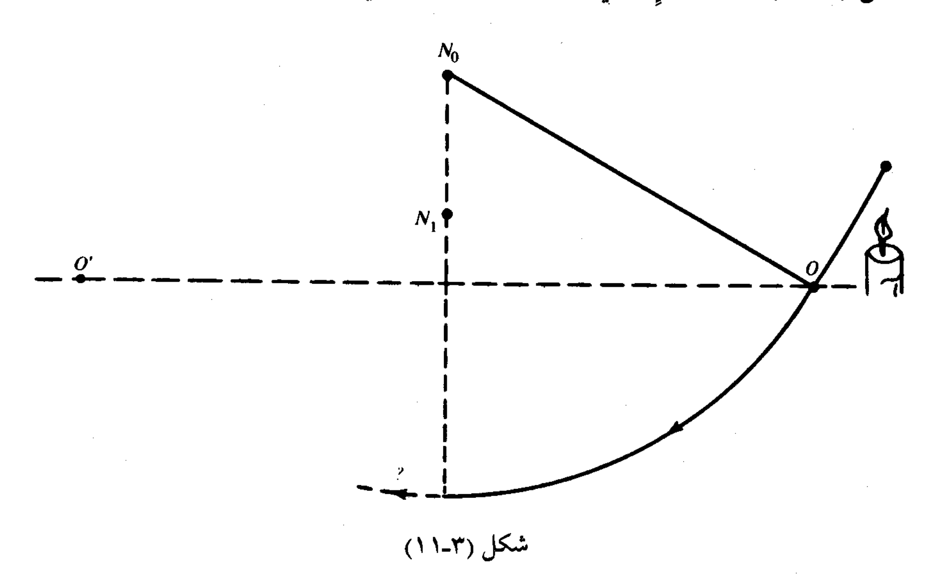
هل توقعت هذه النتيجـة؟ جوابـك الإيجـابي سببـه أنـك معتـاد على حركـة البنـدول . السؤ ال هو: هل توقعت هذه النتيجـة كنتيجـة للمستـوى المـائل الموضح في شكل (٣-٨)؟ أو هل استنتجت من حركة البندول المعروفة نتيجة للمستويات المائلة؟ رؤ ية الأمور العادية بعين فاحصة يحتاج إلى عبقرية .

ماذا لاحـظ جاليليـو؟ عنـد أي نقطـة P من مسارها تتحرك الكرة آنيا باتجاه مماس للدائرة عنـد P . إنهـا تتحـرك وللحظـة فقـط على قطعة صغيرة جدا من مستو مائل ميله يساوي ميل المماس عنـد P . في اللحظـات الأخـرى ، تتحـرك الكـرة على مستـويـات مائلة أخرى بزوايا أخرى . وحيث إن الحركة مستقلة عن زاوية الميل فإنه ليس مهماً إذا اجتازت الكرة مستويين أو مائتي مستـو . أليس المسـار الـدائـري حالـة نهائية حيث الحركة تحدث على عدد لا نهائي من المستـويـات؟ تأمـل الشكـل (٣-١٠) . هل لاحظت من قبل أن حركة البندول هي في الواقع حركة على عدد لا نهائي من المستويات المائلة؟ والأهم من ذلك ، هل لاحظت نتائج ذلك؟



شكل (٣-١٠).

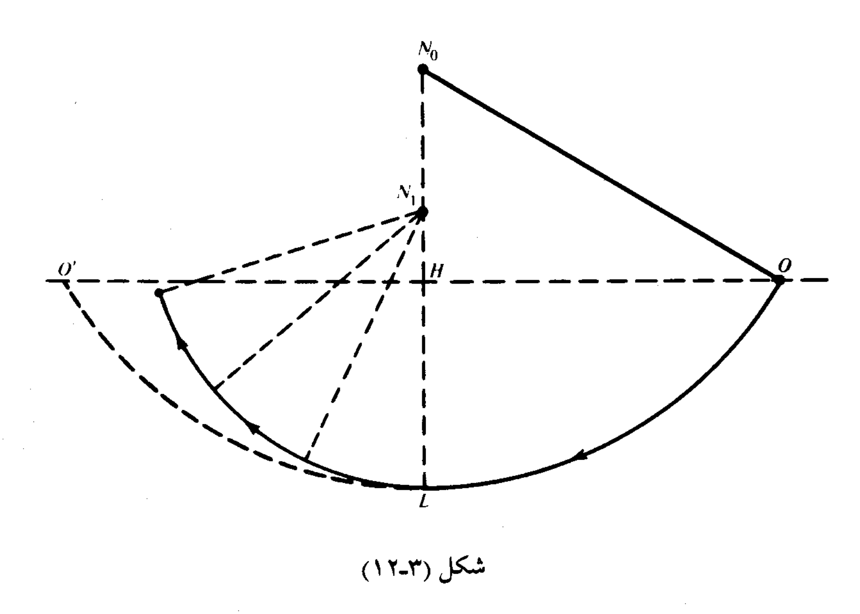
عدِّل المعطيات مثل جاليليو. لكي نقوم بتجاربه الأخرى نحتاج إلى مسمار آخر. انظر الشكل (٣-١١). المسمار الإضافي يثبت تحت المسمار الذي نعلق به الكرة.



شكل (٣-١١)

ماذا يحدث؟ عندما تصل الكرة أدنى نقطة L فإن الخيط يرتكز على المسمار N_1 ، وتصبح الحركة فيما بعد على دائرة نصف قطرها N_1L حول N_1 بدلا من N_0L حول N_0 . لكن الحركة عند L مماسه لكل من الدائرتين حيث إن لهما مماساً مشتركاً هنا ولذا فإن الحركة لا

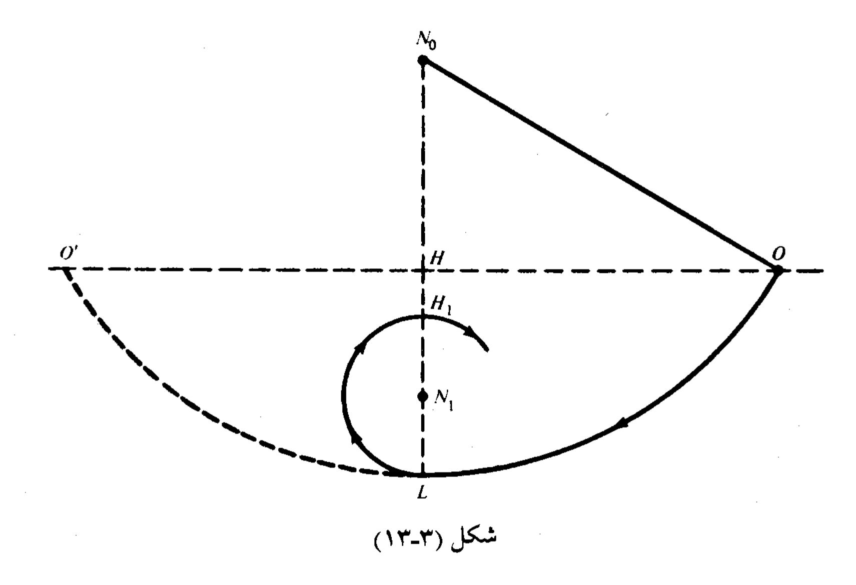
تتعطل. هذا يعني أن السرعة لا تتغير، ولذا فإننا نتوقع أن تصعد الكرة إلى مستواها الأصلي تقريباً. (تذكر مقاومة الهواء وعدم المرونة الكاملة للخيط). إنها تفعل ذلك حقا وهذا التأكيد الإضافي مطمئن. انظر الشكل (٣-١٢).



شكل (٣-١٢)

استمر في تعديل المعطيات. غيِّر ارتفاع N_1 فوق L. ماذا يحدث عندما تصبح N_1 في منتصف المسافة بين L وH؟ في هذه الحالة، تقترب الكرة من H. إنها تصعد جميع المستويات التي تتراوح زواياها من $0°$ إلى $180°$. ماذا يحدث إذا كانت N_1 أقرب إلى L منها إلى H؟ انظر الشكل (٣-١٣).

القيد على الخيط يمنع الكرة من الصعود إلى أعلى من النقطة H_1، حيث $H_1N_1 = N_1L$. الكرة تتخطى H_1 ويبدأ الخيط في اللف حول المسمار N_1، وهذا يدل على أن للكرة سرعة متبقية عند H_1 وأنه كان بإمكانها الصعود إلى نقطة أعلى لولا القيد على الخيط.



شكل (٣-١٣)

هذا إثبات بسيط على أن الجسم الساقط يكتسب سرعة كافية لإعادته إلى الارتفاع الذي سقط منه. لا تتردد في عمل هذه التجارب بسبب نقص المسامير. الجهاز بكامله يمكن شراؤه بربع دولار أو ما يعادله. ولكن تذكر الرجل الذي جعل هذه اللعبة الساذجة إحدى أعظم تجارب الفيزياء.

(٣ ـ ١ ـ ٦) قانون القصور الذاتي

ماذا يمكن قوله إضافة إلى ما قيل؟ هذا يعتمد على ما إذا نظرت إلى هذه التجارب بذكاء جاليليو. خذ الوضع الموضح في الشكل (٣-٨). نحن نعلم أن الجسم المنزلق على المستويات المائلة يعود إلى ارتفاعه الأصلي بغض النظر عن ميل المستوى AO' على المستوى الأفقي. لنفرض الآن أن AO' أفقي تقريباً. ماذا يحدث؟ هنا الميل بسيط جدًّا لدرجة أن الجسم يحتاج أن يقطع أميالاً عديدة إلى أعلى المستوى لكي يسترد ارتفاعه. كلما اقترب المستوى من المستوى الأفقي، ازدادت المسافة التي يقطعها ليسترد ارتفاعه. عندما يصبح المستوى أفقيا تماماً فإن الجسم يسير على المستوي إلى الأبد.

وماذا عن السرعة؟ كلنا نعلم وحتى بدون تجارب أنه كلما زاد انحدار المستوي المائل ازداد انخفاض سرعة الجسم الصاعد عليه وكلما قل الانحدار قل تناقص سرعة الجسم. إذا مال AO' قليلا إلى أعلى فإن تناقص السرعة يكون طفيفا للغاية وإذا مال AO' قليلا إلى أسفل فإن السرعة تزداد بصورة طفيفة أيضاً. الآن ماذا يحدث لو كان AO' أفقيا تماماً؟ السرعة لا يمكن أن تزيد أو تنقص. سرعة الجسم تبقى ثابتة. وكم المسافة اللازم قطعها على المستوى الأفقي ليعود الجسم إلى الارتفاع O ؟ على الجسم أن يسير إلى الأبد.

ما دامت نظرية جاليليو تتفق مع تجاربنا اليومية فإننا نتوقع أن تُستخلص هذه النتائج من معادلاته النظرية بالإضافة إلى تجاربه. من (١`) في (٣-١-٤) نحصل على المعادلة

$$\frac{V}{g \sin \alpha} = T;$$

أي أن الجسم بسرعة V عند أسفل المستوي الذي ميله α سيصل إلى أعلى المستوي بعد الزمن T تحت الظروف المثالية طبعاً. بما أن $\sin \alpha$ تؤول إلى الصفر عندما تقترب من الصفر فإن T تصبح لا نهائية عندما يصير المائل أفقياً. كذلك نتذكر أن الجسم هنا يسقط سقوطاً حراً في مجال جاذبية $g \sin \alpha$ ، أي بتسارع $g \sin \alpha$. إذا كانت $\alpha = 0$ و $\sin \alpha = 0$ فإن $g \sin \alpha = 0$ وهذا يعني أن السرعة ثابتة.

ماذا تعني هذه التجارب والبحوث النظرية؟ لقد استنتج منها جاليليو قانون القصور الذاتي. الجسم يستمر في حالة السكون أو الحركة المنتظمة في خط مستقيم إلا إذا أثرت عليه قوى خارجية (مثل الجاذبية، الاحتكاك) لتغير حالة الحركة.

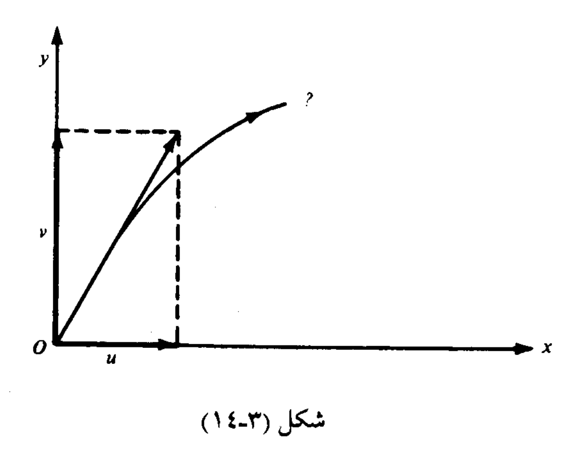
القارىء الذكي قد يعترض حيث إننا استخدمنا قانون القصور الذاتي ضمنيًا في استنتاجه. هذا الاعتراض يسيء فهم الوضع: جاليليو لم يكن يستنتج من نظرية موجودة، لقد كان يؤسس نظرية. الاستخدام الضمني ما هو إلا خطوة إلى الاستخدام الصريح.

لكن لماذا وُصف هذا القانون بقانون القصور الذاتي؟ الجسم غير الحي على عكس الإنسان أو الحيوان لا يعمل شيئاً لكي يتحكم في حركته. كونه يتحرك وكيف يتحرك كل هذا يعتمد على القوى الخارجية. إنه قاصر ذاتيًا. كان جاليليو ينظر إلى هذا القانون في محيط اكتشافه له؛ كان ينظر دائماً إلى الحركة المنتظمة على خط مستقيم في مستو لا متناه. أفكاره كانت أرضية ولم يستطع التخلص منها. كان يعلم أن الأرض كروية ولكنه لم يتأمل النتائج. كان يعرف بعض الأشياء القليلة المعروفة عن النجوم في ذلك الوقت، وكان من الأوائل في استعمال التلسكوب ولكن لم يخطر على باله تطبيق قانون القصور الذاتي على النجوم. إنها فكرة بسيطة ولكنها قفزة عظيمة إلى الأمام. يظهر أن جاليليو أصبح ضحية قانونه ولم يستطع التخلص من القصور على محيط معين. إن عدم قدرة جاليليو على عمل هذه القفزة شيء غريب ولكنه لو استطاع عمل هذا لكان أكثر غرابة. جاليليو كان جاليليو وليس نيوتن.

(٣ ـ ١ ـ ٧) مسار القذيفة

كان اختراع الأسلحة النارية في وقت جاليليو، وأصبح المدفع الكلمة الأخيرة للملوك. مع أن الموضوع خطير، إلا أن فعالية طرق جديدة للقتال من أجل الوطن موضوع مثير. ما هو مسار القذيفة؟ هذا سؤال له أهميته العلمية الكبيرة بالإضافة إلى أهميته العملية. انهمك جاليليو في هذه المسألة، ومن ثم توصل إلى حلها. وكثمرة لعبقريته، نعرف اليوم الطريقة التركيبية.

لكي نبسط المسألة، نفعل مثل جاليليو ونهمل أبعاد القذيفة ونعتبرها نقطة مادية. كذلك نهمل الاحتكاك مع العلم أن مقاومة الهواء للقذيفة ليست قليلة أبدا. لم يكن لدى جاليليو أجهزة لقياسات دقيقة، لكن تذكر أن التقريب الأولي يمثل خطوة إلى تقريب أفضل. على عكس جاليليو، نستطيع تسهيل الحل باستخدام بعض الجبر ومحاور احداثية متعامدة. إن جعل أحد المحاور أفقيًا والآخر رأسيًا أمر حيوي لحل جاليليو. انظر شكل (٣-١٤).



شكل (٣-١٤)

السرعة الابتدائية للقذيفة عندما تنطلق من فوهة المدفع يمثلها قيمة واتجاهاً المتجه الكبير من O . نحلل المتجه إلى مركبتيه u على المحور الأفقي و v على المحور الرأسي . إذا حسبنا حركة القذيفة من فوهة المدفع حيث $x=0$ ، $y=0$ عندما $t=0$ فإن السرعة الأفقية هي u والسرعة الرأسية هي v. الآن نريد أن نعرف مركبات السرعة هذه في أي لحظة t.

فهم جاليليو العميق يكمن في ملاحظته أن الحركة الأفقية لا تتغير . المركبة الأفقية للحركة الناتجة هي في الواقع حركة جسم يسير في مجال بدون جاذبية . تذكر قانونه للقصور الذاتي . هذه المركبة تبقى u. إذن بعد مضي الوقت t ، الإزاحة الأفقية x تساوي

$$x = ut. \qquad (٨)$$

ماذا عن المركبة الرأسية للحركة؟ لو لم يكن هناك جذب إلى أسفل لحصلنا على المعادلة :

$$y = vt.$$

لكن هذا مغاير للحقيقة ، ولذا سوف نكتب الحرف y برقم ، أي

$$y_1 = vt. \qquad (٩)$$

الآن نأخذ الجاذبية في الاعتبار ونتجاهل السرعة الابتدائية ، ومن (٤) نجد

$$y = \frac{1}{2} gt^2$$

حيث المحور الرأسي له اتجاه موجب إلى أسفل. وإذا كان المحور الموجب إلى أسفل فإن

$$y = -\frac{1}{2} gt^2.$$

لكي نشير إلى اهتمامنا المقصود بالسرعة الابتدائية v ، سوف نكتب الحرف y برقم آخر

$$y_2 = -\frac{1}{2} gt^2. \quad (''٩)$$

هنا يستعمل جاليليو مبدأ التركيب. يدعي جاليليو أن الإزاحة الكلية y إلى أعلى للجسم المنطلق من O بسرعة v وتحت تأثير الجاذبية تساوي مجموع الإزاحات y_1 و y_2 ، أي الإزاحة بالسرعة الابتدائية v ولكن بدون مجال الجاذبية والإزاحة في المجال ولكن بدون السرعة الابتدائية. ما هي حجته؟ أولا لنفرض أن الإزاحات تحدث بالتوالي: بعد الوقت t ينزاح الجسم بقدر y_1 ، بعد ذلك ينزاح y_2 في وقت مماثل. واضح أن محصلة الإزاحات المتتالية هو المجموع. باختصار مبدأ التركيب ينطبق على الإزاحات الناتجة عن الحركات المتتالية. لب الموضوع هو: هل يصح المبدأ إذا حدثت الحركات آنيًا؟ كون الجسم له حركة ابتدائية أولا، لا يعتمد على وجود مجال الجاذبية أو عدمه والعكس صحيح. إذن من الممكن تواجد الحركتين في نفس الوقت وبدون أن تؤثر أي منهما على الأخرى، ويمكن القول بأن الإزاحات الناتجة عن هذه الحركات لا تتأثر بكون الحركات آنية. مبدأ التركيب يبقى صحيحاً ومن (٩) و(''٩) نجد

$$y = vt - \frac{1}{2} gt^2. \quad (٩)$$

نستطيع إيجاد المسار الكامل للقذيفة إذا تمكنًا من الإجابة على السؤال: أين القذيفة الآن، بعد t من الثواني منذ إطلاق النار؟ المعادلتان (٨) و(٩) تعطيان الإجابة ومن (٨) نحصل على الإزاحة الأفقية الحالية x ، ومن (٩) نحصل على الإزاحة الرأسية الحالية y ، أي أننا نحصل على مكانها الحالي (x,y). إذا أعطينا الوقت، نستطيع إيجاد المكان ومنه نحصل على صورة لمسار القذيفة.

إذا علمنا الإزاحة الأفقية x للقذيفة، فإننا نستطيع حساب الوقت الذي أطلقت فيه من المعـادلـة (٨) ومن المعـادلـة (٩) نحسب الإزاحـة الـرأسيـة؛ إذا علمنا x، نحسب y المقابلة بواسطة t. في الرياضيات، نسمي t وسيطاً، ونقول إن x وy معرفة وسيطيا. وهذا مثل لو أن X والد T وY الولد الوحيد لـ T فإن T هو الوسيط بين Y وX. بالتخلص من T، نجد أن Y حفيد X. من الأفضل أن نتخلص من t، ونكتب y بدلالة x مباشرة. من (٨)

$$t = \frac{x}{u},$$

إذن

$$t^2 = \frac{x^2}{u^2}.$$

بالتعويض عن t و t^2 في (٩) نجد

$$y = v \cdot \frac{x}{u} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{u^2}. \qquad (١٠)$$

ما نوع المنحنى في (١٠)؟ هل يمكن تحويـل هذه المعـادلـة إلى صورة أخـرى معـروف رسمها البياني؟ لنجعل معامل x^2 مساوياً الوحدة ونضرب في $\frac{-2u^2}{g,}$ ونحصل على

$$-\frac{2u^2}{g} y = -\frac{2uv}{g} x + x^2.$$

بإضافة مربع نصف معامل x إلى الطرفين نجد أن

$$\frac{u^2v^2}{g^2} - \frac{2u^2}{g} y = \frac{u^2v^2}{g^2} - \frac{2uv}{g} x + x^2,$$

إذن المربع كامل

$$-\frac{2u^2}{g}\left(y - \frac{v^2}{2g}\right) = \left(x - \frac{uv}{g}\right)^2.$$

لكن هذا من الصورة

$$-\frac{2u^2}{g}Y = X^2,$$

حيث

$$Y = y - \frac{v^2}{2g} \quad و \quad X = x - \frac{uv}{g},$$

إذن المنحنى قطع مكافىء ورأسه عند $X=0$ ، $Y=0$ ومحوره $X=0$. عندما تكون $X=0$ فإن $x = \frac{u \cdot v}{g}$ وكـذلـك $Y=0$ تعطي $y = \frac{v^2}{2g}$. ومنـه نجد أن (١٠) معادلة قطع مكافىء رأسه $\frac{uv}{g}$ و $\frac{v^2}{2g}$ ومحوره $x = \frac{uv}{g}$.

وقـد نتسـاءل ماذا تعني إحـداثيـات الـرأس؟ من المعادلة (٥) نعرف أن الجسم المقذوف رأسيا بسرعة v يصل إلى ارتفاع $\frac{v^2}{2g}$ ، إذن الرأس يقع عند أقصى ارتفاع لمسار القذيفة. لكن القطـع المكـافىء متـماثـل بالنسبـة لمحـوره. إذن نتـوقـع أن تكـون $\frac{uv}{g}$ نصف مدى القذيفة. هل هذا صحيح؟ عندما تعود القذيفة إلى السطح الأفقي فإن $y=0$ ومن (١٠)

$$0 = \frac{x}{u}\left(v - \frac{g}{2} \cdot \frac{x}{u}\right).$$

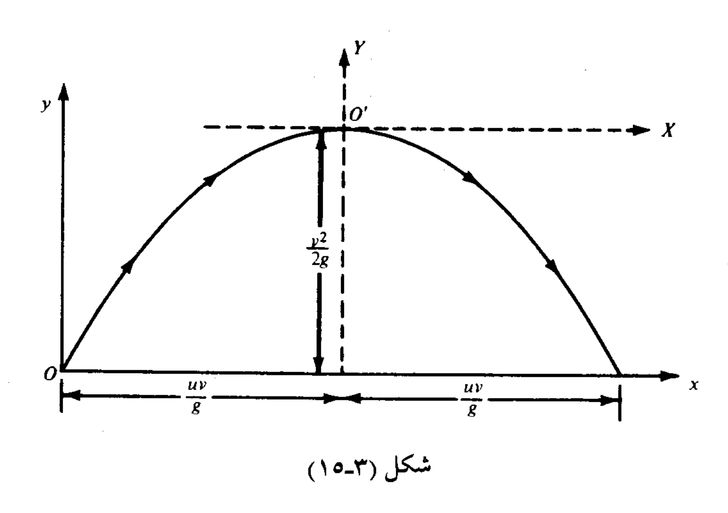
لكن بعد إطلاق القذيفة $x \neq 0$ ، وعلى هذا الأساس

$$0 = v - \frac{g}{2} \cdot \frac{x}{u},$$

إذن

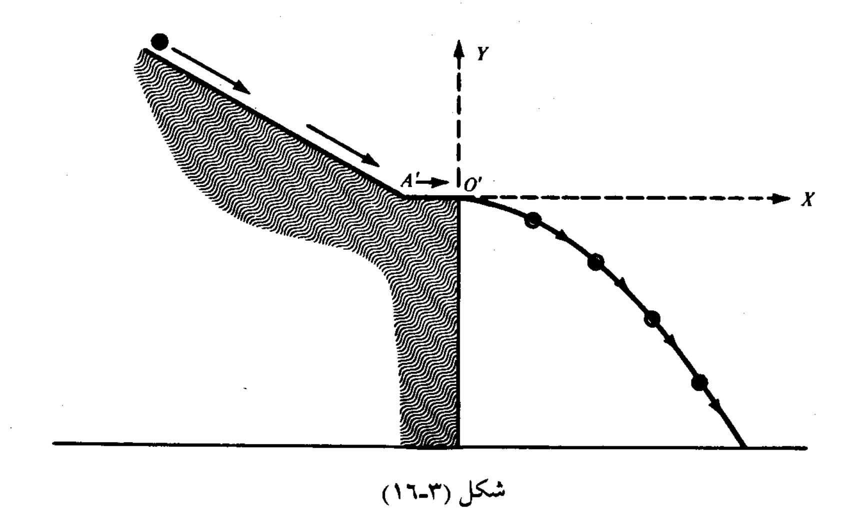
$$x = \frac{2uv}{g}.$$

وهـذا يعني أن $\frac{uv}{g}$ نصف المـدى فعـلاً. الآن يمكن إكـمال الشكـل (٣ـ١٤)، ويصبح الشكل (٣ـ١٥).



شكل (٣-١٥)

كيف تحقق جاليليو عمليًّا من أن مسار القذيفة قطع مكافىء؟ ألم تشاهد من قبل، الكلاب وعجول البحر تقفز من خلال الأطواق؟ النجاح مضمون لأن الطوق يوضع في المكان الذي يقفز فيه الحيوان. جاليليو استعمل هذا المبدأ. انظر الشكل (٣-١٦). السطح المائل يعطي الكرة سرعة معروفة u في الاتجاه الأفقي $A'O'$ وتندفع في هذا الاتجاه كما لو كانت عند O' في الشكل (٣-١٥). مرورها من خلال عدة حلقات مركزها على القطع المكافىء يؤكد نظريته.



شكل (٣-١٦)

نعم، التجربة فيها بعض السذاجة إذا ما قورنت بالمستويات الحديثة، ولكن من يستطيع عمل شيء أفضل بالامكانيات المتوافرة في عهد جاليليو؟ على فكرة، لنعد الآن إلى الشكل (٣-٥). لم أشرح لكم كيف قاس جاليليو الوقت والساعات لم توجد بعد في عصره. لقد غرّى شرائح معدنية دقيقة على السطح المائل عند A ، B ، C ، D حيث يمكن سماع الجسم المار عليها ولا تعيق الحركة كثيراً. وبأذنه الموسيقية استطاع تحديد الفترات الزمنية المتساوية. كل الفيزيائيين يستعملون عقولهم ولكن أفضلهم يفكرون بأصابعهم أيضا.

الجزء الثاني: نيوتن

كان من المحتوم أن يمهد جاليليو لنيوتن. ولد نيوتن في يوم عيد الميلاد عام **١٦٤٢** بعد حوالي إحدى عشر شهراً من وفاة جاليليو، حقيقة لا ينساها الذين يؤمنون بتناسخ الأرواح من قرائي. لم يقدم بابا نويل من قبل هدية عيد ميلاد أفضل للعالم. توفي نيوتن في **١٧٢٧**، ولكن التاريخ الذي يهمنا هو١٦٨٧. هذه هي السنة التي دُفع فيها أخيراً من قبل صديقه هالي *(Halley)* على طبع كتابه *(Principia Mathematica)* ودفع هالي تكاليف الطباعة. لم يحدث من قبل ولا من بعد في تاريخ العلوم أن يأتي شخص بهذه الاكتشافات الكثيرة ويتردد بهذه الصورة عن نشرها. ليبنز *(Leibniz)* كان يقول إن نيوتن أنجز الجزء الأعظم من الرياضيات بأكملها. هذه الملاحظة قيلت قبل أن يتخاصم مع نيوتن.

لقد كانت شخصية نيوتن أقل حيوية وحياته أقل إثارة من شخصية وحياة جاليليو. على النقيض من جاليليو، كان نيوتن خجولاً ومنطوياً على نفسه ويكره الجدل. يقال إنه عندما طلب منه أن يرشح نفسه للانتخابات في الجمعية الملكية أنه تراجع في البداية لأن انتخابه سيؤدي إلى زيادة معارفه وأصدقائه. أبحاثه كانت كل حياته. جثمانه يرقد في دير وستمنستر *(Westminster Abbey)*، أما قانونه للجاذبية، وقوانينه الميكانيكية فقد أصبحت جزءاً لا يتجزأ من الفطرة السليمة.

(٣ ـ ٢ ـ ١) التفاح والقذائف والقمر

الحرف g يمثل الجاذبية التي جعلت التفاحة في حديقة نيوتن تسقط. هذه قصة قديمة ولكن مدى صحتها غير معروف. على كل حال هي قصة جيدة.

عندما كان نيوتن شابًّا في كامبر يدج *(Cambridge)* انتشر وباء خطير. هذا جعله يعود إلى مزرعة والديه في ولزثورب من مقاطعة لينكولنشير. هناك قضى حوالي سنة من الهدوء في الريف وأنجز أعظم اكتشافاته: مفهوم الجاذبية وحساب التفاضل والتكامل. سواء سقطت عليه تفاحة أو لم تسقط عندما كان يتأمل في حديقته، لقد سقطت عليه فكرة عظيمة. بالرغم من أن نيوتن عالج مشكلة الجاذبية بعقلية مفتوحة، إلا أنه لم يعالجها بعقلية فارغة: الآلاف من الناس رأوا التفاح يسقط ولم تخطر على بالهم فكرة نيوتن. ماذا كان يدور في ذهن نيوتن عندما كان يتأمل في مزرعته؟ هناك رسم في ملحق كتابه بعنوان «نظام العالم» وهذا يجعل تطور أفكاره حول الموضوع سرًّا مفتوحاً. كان يعرف بعض الأمور عن التفاح، القذائف والقمر وهذه أمور يعرفها كل الفيزيائيين في عصره. القمر مثل التفاحة كروي تقريباً ويفترض أنه ثقيل ولكن لماذا لا يسقط أيضاً؟ التفاحة تنجذب إلى الأرض بسبب الجاذبية الأرضية؟ لماذا لا ينجذب القمر أيضا؟ ما الذي يجعل القمر يدور حول الأرض، قانون جاليليو للقصور الذاتي يقتضي أن يسير القمر في خط مستقيم وبسرعة منتظمة إذا لم تؤثر عليه قوة تغير من حركته. ما الذي يسحبه من مساره المستقيم ويجعله يتحرك في خط منحن حول الأرض؟ لكن كيف يمكن الربط بين مسار التفاحة الساقطة ومدار القمر البيضاوي؟ الخطوط المستقيمة تختلف كثيرا عن القطوع الناقصة، مسارات التفاح تختلف كثيرا عن مدار القمر. هل من الممكن أن تختلف المنحنيات أكثر من ذلك؟ كيف يمكن أن يمثل المنحنيان قانونا واحدا.

نيوتن ببصيرته وعبقريته رأى الإمكانية. ما هي خطته العظيمة؟ إنها القذائف. نعم، القذائف. ألم يثبت جاليليو أن مسار القذائف قطع مكافىء؟ أليست التفاحة الساقطة قذيفة

صغيرة أطلقت بسرعة أفقية صغيرة جدًّا؟ أليس المسار إذن حالة نهائية لحركة القطع المكافىء؟ وماذا عن القمر؟ أليس هذا مجرد قذيفة ضخمة؟ أليس قذيفة ضخمة أطلقت بسرعة أفقية عظيمة؟

تأمل قذيفة تطلق من إحدى قمم جبال الانديز في اتجاه المحيط الهادي. إذا أطلقت بسرعة عالية، أليس ممكناً أن تصل القذيفة إلى المحيط؟ إذا أطلقت من قمة أعلى وبسرعة أكبر، ألا يصبح مسارها قطعاً مكافئاً أكبر؟ أليس من الممكن جعل القذيفة تعبر المحيط؟ ولكن إذا أمكن جعل المساريقطع نصف المسافة حول الأرض، لماذا لا يقطع ثلاثة أرباع المسافة؟ الخيال لا يكلف شيئاً؛ إذا أمكن قطع ثلاثة أرباع المسافة، لماذا لا نقطع أربعة أرباعها؟ إنه شيء مثير أن نرى القذيفة تسقط على المدفع الذي أطلقت منه. إذا أردنا إثارة أكبر فإننا نحتاج سرعة أكبر. في هذه الحالة، القذيفة لا تسقط على المدفع بعد الدوران حول الأرض وإنما تستمر. مسار القطع المكافىء المنتهي يتحول إلى منحن غير منتهي. وهكذا نحصل على قمر مكون من قذيفة.

كان خيال نيوتن خصباً مكنه من رؤ ية الانتقال المستمر من التفاحة إلى القمر. حقًّا هذه الحجة لابد أن تكون أكثر الحجج بالتشبيه إثارة في تاريخ العلوم. ستجد نسخة من رسوم كتاب نيوتن *(Principia Mathematica)* في كتابي
(Mathematics and Plausible Reasoning) الجزء الأول صفحة ٢٧.

إذا كان القمر يبقى في مداره بسبب قوة جذب الأرض، أليست الأرض والكواكب الأخرى تدور حول الشمس بسبب قوة جذب الشمس؟ إن جعل الخيال ينطلق بلا حد، شيء وتدعيم هذه التأملات بما أصبح فيما بعد مجموعة ساحقة من الاعتبارات الساندة شيء آخر. كان لدى نيوتن القدرة العقلية أن يعمل كلا منهما.

(٣ ـ ٢ ـ ٢) لا يوجد دخان بدون نار

التفاح والحجارة تسقط وكلما سقطت أكثر، ازدادت سرعتها. ما الذي يجعلها تسرع؟ ربما أن هناك قوة أرضية تؤثر عليها. لكن القوة ليست شيئاً يمكن رؤيته. كيف يمكن قياسها إذا تعذرت رؤيتها؟ بتأثيرها: الدخان يدل على حريق في الوادي وراء التل. ما هو تأثير القوة؟ التسارع، إنها تسبب الزيادة في السرعة.

حسب جاليليو، الجسم الساقط من السكون يحقق

$$v = g \cdot t.$$

إذا زادت السرعة بمقدار β بعد فترة من الزمن تساوي τ فإن

$$v + \beta = g(t + \tau).$$

بطرح الأول من الأخير، نجد

$$\beta = g \cdot \tau,$$

أي

$$\frac{\beta}{\tau} = g;$$

أو

$$g = \frac{\text{التغير في السرعة}}{\text{التغير في الزمن}}$$

لكن، لو حدث تغير في السرعة بمقدار ٦ قدم/ثا في ٣ ثواني، فإن هذا يمثل نفس المعدل لو تغيرت السرعة بمقدار ٢ قدم/ثا في ثانية واحدة، وهذا يعني أن:

التسارع = التغير في السرعة في وحدة الزمن

نحن نعرف أن جاليليو وجد أن التسارع g ثابت ولكن إذا أخذنا في الاعتبار أن القياس لا يمكن أن يخلو من الخطأ فعلينا أن نكون حذرين. الجاذبية g على أو بقرب سطح الأرض تبقى ثابتة في حدود أخطاء القياس. في الواقع، هذا قريب من الحقيقة.

ولكن لب الموضوع هو أن التسارع مقياس للقوة. ماذا يعني هذا بالنسبة لحركة الأرض والكواكب حول الشمس؟ ما هو الدليل على أن كلا منها يبقى في مداره بسبب قوة جذب الشمس؟ الجواب هو تسارعه نحو الشمس.

(٣ - ٢ - ٣) الكواكب تتسارع نحو الشمس

لنفرض أن القمر يتسارع نحو مركز الأرض وأن الكواكب تتسارع نحو مركز الشمس. ما نتائج هذه الفرضيات؟ أي نوع من المدارات ستأخذ الكواكب والقمر؟ هذه مسألة رياضية صعبة لأن التسارع يحدث بصورة مستمرة ولذا يصعب حسابه. كيف نتعامل مع التسارع المستمر؟ كيف تعامل جاليليو مع السرعة المتغيرة باستمرار؟ راجع الأشكال (٣-٢ ، ٣-٣، ٣-٤).

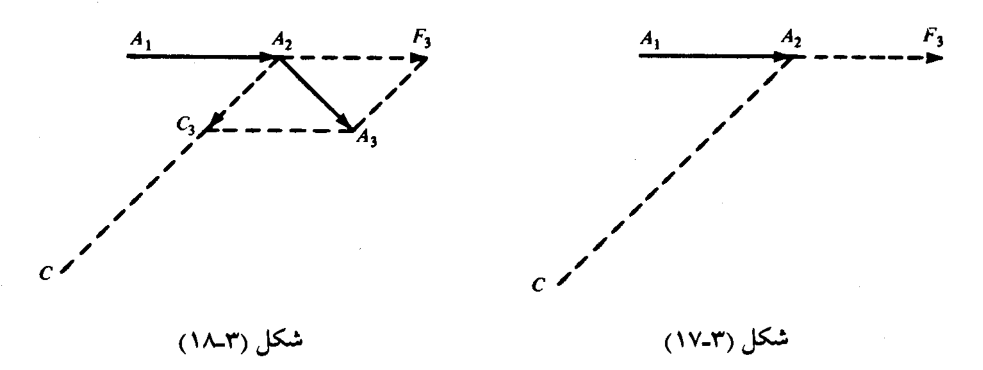
مثل جاليليو ونيوتن بعده، نتعامل مع المتغير باستمرار عن طريق البداية بتشويه متقطع له قفزات فجائية ومن ثم نزيد العدد ونخفف من القفزات وبذا نجعل الوضع يقترب من التغير التدريجي. هكذا يصبح الخيال حقيقة. إن اعتبار المتصل حالة نهائية للمتقطع هو في الحقيقة الفكرة الرئيسية وراء حساب التكامل. نيوتن اخترعه خصيصا ليسهل هذه المعالجة. بالطبع، لقد ورث نيوتن الكثير من أرخميدس وكافاليري وفيرمات *(Fermat)* ، ولكن إسهامه واضح ومحدد. التاريخ يعتبره بحق مؤسس حساب التفاضل والتكامل.

يحق لنا أن نفترض أن نيوتن حصل على نتائجه في الميكانيكا عن طريق حساب التكامل ولكن حسب كتاباته كان يصر على تحاشي حساب التفاضل والتكامل. كان يعتقد أنه بذلك

سيزيد من صعوبة المواضيع على قرائه. أنا لا أعرف إلى أي مدى سهل هذا الأسلوب على معاصريه قراءة أبحاثه ولكنه بالتأكيد صعَّب الأمور بالنسبة لنا الآن. الطرق البدائية والقديمة التي استخدمها لا يمكن أن تنافس التفاضل والتكامل إلا إذا كان العداد ينافس الحاسب الالكتروني. ولكن لحسن حظ المؤلف والقارىء، يوجد في كتاب نيوتن استنتاج بسيط وهام في الوقت نفسه. هذا الاستنتاج يعطي الإجابة على السؤال المطروح سابقا: ما هو مدار الكوكب الذي يتسارع باستمرار إلى نقطة ثابتة C؟ نعود الآن إلى إجابة نيوتن.

نفرض أن الكوكب P موجود عند A_1 ويتحرك بسرعة v قدم/ثا. نفرض أيضا أنه لا تؤثر عليه أية قوة خارجية خلال الثانية التالية. ماذا يحدث؟ حسب قانون جاليليو للقصور الذاتي، يستمر الكوكب في خط مستقيم وبسرعة منتظمة v قدم/ثا. وكنتيجة لذلك، فإن الكوكب يكون بعد ثانية عند A_2 والتي تبعد v قدم عن A_1 والقطعة الموجهة A_1A_2 تمثل السرعة خلال هذه الثانية.

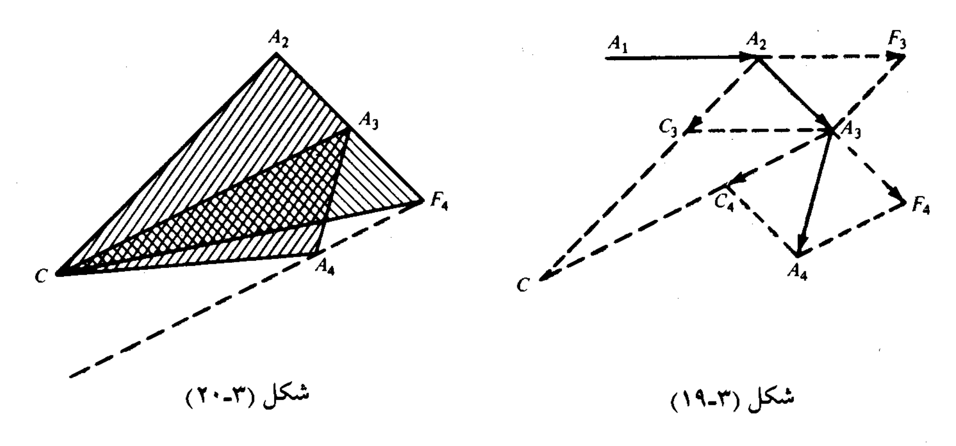
الآن نفرض أن P تتسارع آنيًا ناحية C عندما تصل إلى A_2. لو لم يكن هناك تسارع عند A_2، لاستمر الكوكب بسرعة v قدم/ثا على امتداد A_1A_2. بعد ثانية، يصبح الكوكب على بعد v قدم من A_2، أي عند F_3 حيث $A_1A_2 = A_2F_3$. انظر الشكل (٣-١٧). ولكن عند A_2 يتسارع الكوكب ناحية C بمقدار المتجه A_2C_3. إذن محصلة السرعة عندما يترك الكوكب النقطة A_2 تساوي القطر A_2A_3 في متوازي الأضلاع الموضح بالشكل (٣-١٨).



شكل (٣-١٨) شكل (٣-١٧)

ماذا يحدث بعد ذلك؟ تذكر أن التسارع أثر على P عند A_2 للحظة فقط. بعد مغادرة P للنقطة A_2 لم يعد للتسارع أي وجود. إذن بعد مغادرة A_2 وحسب قانون القصور الذاتي، يستمر P في اتجاه A_2A_3 قاطعاً مسافة A_2A_3 كل ثانية إلى أن يتأثر بقوة خارجية. بعد ثانية من مغادرة A_2 يصل الكوكب إلى A_3 .

عند A_3 ، نفترض أن قوة آنية تؤثر على P وتسبب تسارعاً ناحية C. يمكن تمثيل سرعة P عند مغادرتها للنقطة A_3 بالقطر A_3A_4 في متوازي الأضلاع في الشكل (٣-١٩).



شكل (٣-٢٠) شكل (٣-١٩)

لو لم يتسارع P ناحية C عندما وصل إلى A_3 لاستمر في مساره على A_2A_3 ووصل إلى F_4 بعد ثانية. لو لم تكن سرعته $\overrightarrow{A_2A_3}$ عندما تسارع إلى C عند A_3 لتحرك في اتجاه A_3C ليصل C_4 بعد ثانية. ولكن بالسرعتين، يتحرك الكوكب P على A_3A_4 ويصل A_4 بعد ثانية. لا حاجة الآن لمناقشة التسارع الذي يؤثر على P عند A_4 .

الدراسة الواعية لنتائج هذه التسارعات المتقطعة نحو C تعطينا المفتاح لتحديد نتائج تسارع P نحو C بصورة مستمرة.

لاحظ في الشكل (٣-١٩) أن $A_2A_3 = A_3F_4$ وأن $F_4A_4 \| A_3C$. دعونا نرسم هذا الشكل بصورة أخرى: شكل (٣-٢٠).

بما أن المثلثين CA_2A_3 و CA_3F_4 لهما قاعدتان متساويتان A_3F_4 و A_2A_3 ونفس الارتفاع فإنهما متساويا المساحة. إذن:

$$\triangle CA_2A_3 = \triangle CA_3F_4.$$

وبما أن المثلثين CA_3F_4 و CA_3A_4 لهما نفس القاعدة ونفس الارتفاع، فإنهما متساويا المساحة

$$\triangle CA_3F_4 = \triangle CA_3A_4.$$

إذن

$$\triangle CA_2A_3 = \triangle CA_3A_4.$$

ماذا نستنتج؟ ما علاقة هذه النتيجة بقوانين حركة الكواكب المعروفة؟ إن متجه نصف القطر الذي يصل المركز C بالكوكب P يمسح مساحات متساوية في ثوان متتالية. لكن أليس جليًّا أن نفس الشيء يحدث لو أخذنا وحدات زمنية أخرى غير الثانية؟ نستطيع أن نأخذ عشر الثانية، جزء من مائة. . أو جزء من المليون أو البليون. . . عندما تتناقص الفترات الزمنية المتساوية فإن تأثير التسارعات المركزية المتقطعة يقترب أكثر فأكثر من التسارع المركزي المستمر.

ماذا نستنتج؟ إذا تسارع الكوكب P باستمرار نحو المركز C فإنه يتخذ مساراً بحيث يمسح متجه نصف القطر PC مساحات متساوية في أزمنة متساوية. لكن هذا هو قانون كبلر الثاني.

نادرا ما تؤدي مناقشة بسيطة مثل هذه إلى نتائج بهذه الخطورة. لقد أقنعت نيوتن ـ والمفروض أن تقنعك أنت أيضا ـ بأن الكواكب تتسارع في اتجاه الشمس. يجب احترام الأشكال (٣ـ١٩ و٣ـ٢٠)، إنها تربط الميكانيكا الأرضية بالفضاء الخارجي.

(٣ ـ ٢ ـ ٤) ما هو قانون الجاذبية العام؟

لقد رأينا كيف توصل نيوتن إلى تخمينه بأن الكواكب تتسارع نحو الشمس مثل تسارع

التفـاح نحـو الأرض وذلـك عن طريق ملاحظتـه للانتقـال المستمـر بين سقوط التفاحة ومسار القذيفة ومدار الكواكب. ولكن كيف قدم الأدلة التي تسند تخمينه؟ لقد عمل هذا عن طريق إثبـاتـه لقـانـون كبلر الثـاني باعتماده على تخمينه. (إنه لمن الممكن أن يكون قانون كبلر نتيجة ضرورية لتخمين آخر).

ما هي الخطوة التالية؟ بافتراض أن الكواكب تتسارع فعلاً باتجاه الشمس والقمر يتسارع باتجـاه الأرض حيث المـدارات منتظمـة فإن هذه التسارعات لا يمكن أن تكون أمورا عشوائية ولكن لابد أن تخضع لقانون معين. أليست وجهة نظر نيوتن الرئيسية هي استمرارية الانتقال؟ إذن الآثـار المتشـابهة لابد أن تكون مسبباتها متشابهة. إن قوة جذب الأرض للتفاحة والقذيفة والقمـر لابـد أن تكـون لها نفس طبيعـة جذب الشمس للأرض. لابـد أن يكون هناك قانون جاذبية عام. الخطوة الثانية هي تعيينه.

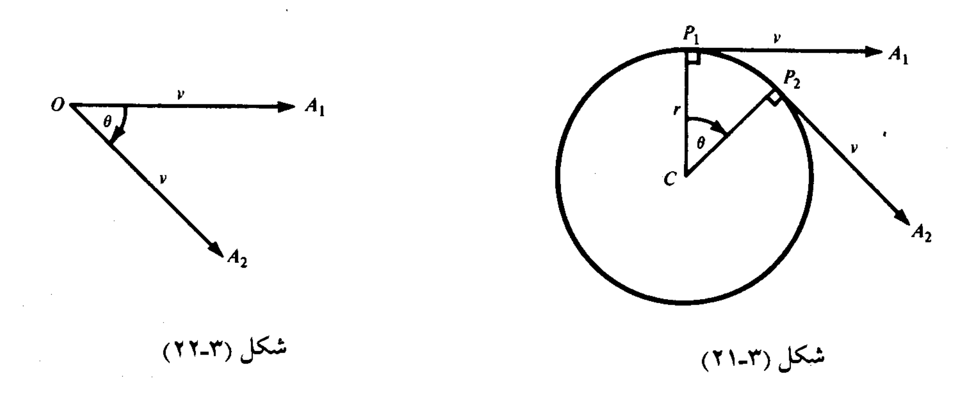
لقـد خدعني مدرس الفيـزيـاء عندما كنت في المدرسة. الساحر نيوتن يقدم أعظم عرض على الأرض ـ أو في المجموعة الشمسية ـ حيث يخرج أرنب الجاذبية من القبعة الكونية. وفي النهاية أحصل على نص قانون الجاذبية بدون أي توضيح عن كيفية عمل اللعبة.

كيف جاء الأرنب إلى قبعة السيد نيوتن؟ لكي تفهم خفة يده عليك أولا أن تتعلم حيلة أسـاسيـة في السحـر المداري وهذه الحيلة هي استنتاج التسارع المركزي لجسم يدور بانتظام. لقـد وجـد هاملتـون *Hamilton* (١٨٠٥-١٨٦٥) طريقـة رائعـة لاستنتاج هذا التسارع بعد اكتشاف نيوتن. الآن نتفحص طريقة هاملتون.

(٣ ـ ٢ ـ ٥) الحركة الدائرية المنتظمة: هودوغراف هاملتون (Hodograph)

خذ الجسيم P الذي يدور بحركة منتظمة على دائرة نصف قطرها r ومركزها C. بما أن P يتحرك على دائرة، إذن اتجاه حركته يتغير باستمرار وعليه فإن سرعته تتغير باستمرار أيضاً. بما

أن حركـة P دائـريـة منتظمة، إذن فهويقطع مسافات متساوية في أزمنة متساوية، أي أن قيمة سرعتـه ثابتـة. إذا مثلنـا سرعـة P عنـد P_1 بالمتجه $\overrightarrow{P_1A_1}$ وسرعته عند أي نقطة أخرى P_2 بالمتجـه $\overrightarrow{P_2A_2}$, فإن المتجهـين لهما نفس الطـول. وهذا الطول المشترك يساوي قيمة السرعة، أي المسافة المقطوعة في وحدة الزمن، انظر الشكل (٣-٢١).



شكل (٣-٢١)

شكل (٣-٢٢)

كون متجهي السـرعـة $\overrightarrow{P_1A_1}$ و $\overrightarrow{P_2A_2}$ لهما نفس الطـول أثـار فضول هاملتون. ما أهمية هذه الحقيقة؟ إنها تعني أن P تتحرك بسرعة قيمتها ثابتة. ماذا غير ذلك؟ لقد أعطى هاملتون تفسيراً جديدا (الهودوغراف) ليوضح حقيقة هامة أخرى.

لنفرض أن نسخة لكل من المتجهين $\overrightarrow{P_1A_1}$ و $\overrightarrow{P_2A_2}$ تنتقل بموازاة نفسها بحيث تبدأ من نقطة ثابتة O. انظر الشكل (٣-٢٢). إذن $\overrightarrow{OA_1}$ نسخة من $\overrightarrow{P_1A_1}$ و$\overrightarrow{OA_2}$ نسخة من $\overrightarrow{P_2A_2}$. بما أن النسختـين موازيتـان للمتجهـين الأصليين فإن الزاوية بين النسختين تساوي الزاوية θ بين الـزوج الأصـلي. على هذا الأسـاس، يمكن اعتبار الأشكال (٣-٢١ و٣-٢٢)، أقراص ساعـات متـزامنـة - التـزامن هنـا يعني أنـه عنـدما يدور CP بانتظام من CP_1 إلى CP_2 على السـاعـة الأصلية فإن OA يدور من OA_1 إلى OA_2 على الهودوغراف. نستنتج أن OA يدور دورة كاملة في نفس الوقت T الذي يدور فيه CP دورة كاملة. ماذا يحدث الآن؟ خلال الفترة T يدور P على محيط الدائرة التي نصف قطرها r بسرعة منتظمة v وهذا يعني أن $Tv = 2\pi r$

بنفس الطريقة، A يدور على محيط دائرة نصف قطرها v وبسرعة منتظمة a في الوقت نفسه.

إذن

$$Ta = 2\pi v.$$

و

$$\frac{Ta}{Tv} = \frac{2\pi v}{2\pi r}$$

ومنه

$$\frac{a}{v} = \frac{v}{r}$$

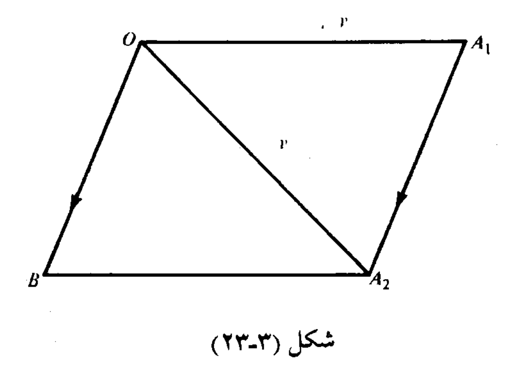
وهكذا نحصل على

$$a = \frac{v^2}{r}. \qquad (١١)$$

إن بساطة العمليات هنا قد تخفي علينا معنى ما توصلنا إليه. ما هي a؟ إنها سرعة رأس المتجه، السرعة الآنية لـ A. ولكن ما هي السرعة الآنية لرأس المتجه A؟ لقد أجاب على هذا السؤال هاملتون بعبقريته وبصيرته. إنها مقدار التغير الآني في سرعة المتجه $\overrightarrow{OA}$. لكن $\overrightarrow{OA}$ نسخة لسرعة P. باختصار، a تمثل مقدار التسارع الآني للجسم P : التسارع هو سرعة السرعة.

إذن (١١) تعطي مقدار تسارع P. ولكن ما هو اتجاه التسارع؟ حسب نيوتن الكواكب تتسارع في اتجاه الشمس، وأنت بالتأكيد مستعد أن تصدق أن تسارع P في اتجاه C. لكن يمكن استنتاج هذه الحقيقة من هودوغراف هاملتون وهذا يطمئننا أكثر.

إن حركة A عند A_1 على سبيل المثال تكون مماسة للدائرة عند النقطة A_1 أي أنها عمودية على OA_1 في الشكل (٣-٢٢) وعليه فهي موازية لـ P_1C في الشكل (٣-٢١). إذن تسارع P عند P_1 يكون في اتجاه P_1C . لكن A_1 ، P_1 نقاط اختيارية. إذن يمكن القول بأن تسارع P يتجه دائماً إلى مركز دائرة الدورانC .



شكل (٣-٢٣)

ما قلنـاه باختصـار عن مقدار التسارع يمكن قوله بطريقة أخرى ولكنها أطول وهذا على حساب قصتنا القصيرة. لنفرض أن OA في الوضع OA_2 بعد مضي t من الوقت من وجوده في الوضع OA_1. نكمل متوازي الأضلاع OA_1A_2B . انظر الشكل (٣-٢٣). $\overrightarrow{OA_2}$ محصلة $\overrightarrow{OA_1}$ و$\overrightarrow{OB}$ ولذا فسرعة P عند P_1 يجب أن يضاف لها $\overrightarrow{OB}$ لتصبح $\overrightarrow{OA_2}$ عند P_2 . لكن هذه الـزيـادة في السـرعـة $\overrightarrow{OB}$ تحدث خلال الزمن t إذن $\overrightarrow{OB}/t$ هو معدل الزيادة في السرعة، أي متوسط تسارع P عندما تنتقل من P_1 إلى P_2 . لكن يمكن أخذ المتجه المكافىء $\overrightarrow{A_1A_2}$ بدلا من $\overrightarrow{OB}$. إذن $\overrightarrow{A_1A_2}/t$ يعطي متوسط تسارع P عندما تنتقل من P_1 إلى P_2 .

لنفرض الآن أن A_2 قريبة جدًّا من A_1 . كلما قربت A_2 من A_1 اقتربت المساواة التالية من الصحة.

طـول $\overrightarrow{A_1A_2}$ = القوس A_1A_2 على الهودوغراف.

ومنه

$$\text{طول } \frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{t} = \frac{\text{القوس } A_1A_2}{t}$$

لكـــن

طول القوس $A_1A_2 = a \times t$

إذن

$$a=\frac{A_1A_2 \text{ طول القوس}}{t}$$

إذن كلما صغرت الفترة t ، اقترب طول القوس A_1A_2 من طول القطعة A_1A_2 أي أن

$$a=\frac{\mathrm{A_1A_2} \text{ طول}}{t}$$

وعليه فإن مقدار التسارع الآني هو a .

(٣ ـ ٢ ـ ٦) حول اكتشاف نيوتن لقانون الجاذبية

اكتشاف نيوتن العظيم يكمن في تحديد العلاقة بين تسارع كوكب نحو الشمس وبعده عنها. هذا بالإضافة إلى جرأته في افتراض أن كل جسم في الكون يجذب كل جسم آخر حسب العلاقة السابقة. ما أهمية اكتشاف نيوتن لقانون التسارع المركزي لجسم في حركة دائرية منتظمة؟ تذكر أن التقريب الأولي الجيد غالباً ما يبسط مسألة معقدة ويجعل حلها ممكناً. ما يصح في الحالة المبسطة قد يصح في الحالة العامة أو على الأقل يدل على شيء ما.

حسب قانون كبلر الأول، كل كوكب يسير على قطع ناقص حيث الشمس عند أحد بؤرتيه. في الواقع، اختلاف مراكز مدارات الكواكب صغير جدا، أي أن المدارات قريبة جدا من دوائر مدار كوكب المريخ الذي أعطاه كبلر دراسة خاصة أقل دائرية من الكواكب الأخرى ما عدا عطارد. هذا الكوكب مثل الكواكب الأخرى يتعرض لتغيرات طفيفة في مداره (بسبب جاذبية الكواكب الأخرى)، ولكن كتقريب أولي يمكن اعتبار مداره دائرة. نبسط المسألة ونعتبر المدار دائريا. ماذا نجد؟

حسب قانــون كبلر الثـاني، الكـواكب تتحـرك بحيث يمسـح متجـه نصف القطـر من الشمس مسـاحـات متسـاويـة في أزمنـة متسـاويـة . لكن إذا كان المـدار دائريا فإنه واضح أن المساحات المتساوية لن تمسح في أزمنة متساوية إلا إذا كانت الحركة دائرية منتظمة . إذن يمكن تطبيق القـانـون (١١) . لنفـرض أن R نصف قطـر مدار المـريـخ حول الشمس وأن v سرعته المنتظمة، إذن من (١١) نحسب قيمة تسارع المريخ نحو الشمس والتسارع المركزي يساوي

$$a = v^2 \cdot \frac{1}{R} . \qquad (١٢)$$

لقـد حسبنـا a بدلالـة R و v، وهـدف نيـوتن هو أن يكتب a بدلالـة R فقـط . علينـا أن نتخلص من v ولذا فإننا نحتاج إلى معادلة أخرى. تذكر كيف استنتجنا (١١) . إذا كانت T مدة دوران المريخ، فإننا نحصل على معادلة مشابهة لمعادلة استعملت للحصول على (١١) وهذه المعادلة هي

$$T \cdot v = 2\pi R,$$

إذن

$$v = \frac{2\pi}{T} R.$$

بالتربيع والتعويض عن v^2 في (١٢) نصل إلى

$$a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot R^2 \cdot \frac{1}{R} ;$$

إذن

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2} R. \qquad (١٣)$$

لقد تخلصنا من v ولكننا أدخلنا T . هل نحن أحسن حالا؟ تذكر أن وجود نيوتن يفترض وجود كبلر. ألم يقل كبلر شيئا هاما حول T ؟

حسب قانون كبلر الثالث، مربع T يتناسب مع مكعب R . بصورة أخرى T تتناسب مع $R^{3/2}$ وجبريا

$$T = c \cdot R^{3/2},$$

حيث c ثابت مستقل عن R. إذن مربع T يساوي

$$T^2 = c^2 \cdot R^3$$

بالتعويض عن T^2 في (١٣) نجد

$$a = \frac{4\pi^2}{c^2 R^3} \cdot R,$$

أو

$$a = \frac{4\pi^2}{c^2} \cdot \frac{1}{R^2}, \qquad (١٤)$$

إذن a تتناسب عكسيا مع مربع المسافة بين المريخ والشمس. هذه خطوة عظيمة في سبيل اكتشاف نيوتن لقانون الجاذبية.

(٣ ـ ٢ ـ ٧) الطريقة العلمية: التحقيق

الفرق بين التخمين والفرضية والنظرية والقانون فرق في الدرجة وليس فرق في النوعية. الفرق في المصطلحات فرق في التأكيد ويدل على مدى رسوخ وقبول الفرضية.

إن فكرة كون المدفع هدف نفسه إذا أطلق بسرعة كافية تعتبر فكرة متطرفة وإن تصور قذيفة تدور حول الأرض لتعود إلى مكان إطلاقها يعتبر ضرباً من الخيال. لكن حينما ننظر إلى هذه الرحلة المفترضة في الإطار الذي رآها فيه نيوتن كحالة متوسطة بين مسار التفاحة الساقطة

ومدار القمر فإن وضعها يختلف. إن وجهة نظر التغير المستمر تعطي الافتراض إمكانية تجعله جديرا بالدراسة الجدية. التخمينات المفرطة تصبح فرضيات واقعية.

عندما أثبت نيوتن قانون كبلر الثاني من فرضيته بأن الكواكب تتسارع نحو الشمس كان هذا بمثابة دليل قوي على أن الكواكب التي تتسارع مركزيا نحو الشمس تدور في قطوع ناقصة. التفاحة الساقطة ودوران القمر لهما نفس التفسير؛ القطع الأرضية والسماوية من اللغز الكوني تنطبق مع بعضها البعض. ما كنا نشك فيه أصبحنا نقبله الآن بشيء من القناعة؛ الفرضية صارت نظرية. بتطبيق قانون كبلر الثالث، تتحول النظرية إلى نظرية محددة: وهي أن التسارع المركزي يتناسب عكسيا مع مربع المسافة.

لقد استعمل جاليليو التلسكوب المخترع حديثاً في اكتشاف ثلاثة من أقمار المشتري ثم اكتشف قمراً رابعاً فيما بعد. لقد وُجد أن دورات أقمار المشتري تحقق قانون كبلر الثالث مثل دوران الكواكب حول الشمس. هنا أيضا أقمار المشتري تدور حول شمسها (المشتري) حسب القانون

$$T = c \cdot R^{3/2}.$$

هذا نظام ثان يخضع للقانون نفسه، طبعا كل نظام له قيمة خاصة للثابت c. هذه اعتبارات هامة جدا بالنسبة لنيوتن؛ إن تحقق قانون كبلر الثالث هنا دليل ثابت على أن التسارع المركزي يتناسب عكسيًّا مع مربع المسافة في هذا النظام أيضاً. لكن إذا تحقق هذا في نظامين لماذا لا يتحقق في ثالث ورابع...؟ وهكذا توصل نيوتن إلى نظريته بخصوص الجاذبية.

ولكن كيف تصبح النظرية قانوناً؟ إن قرار «التشريع» الذي يضع النظرية على قائمة قوانين الفيزياء هو التأكد من صحتها. وكيف يتأكد نيوتن من صحة نظريته؟ كان عليه أن

ينـزل نظـريتـه من السـماء إلى الأرض كما نقـول. أليست قطعة الطباشير التي اكتب بها على اللوح، مثـل القمـر، أحـد كواكب النظـام الـذي شمسـه الأرض؟ لكن عنـدما أطلق قطعة الطبـاشـير فإنهـا تتسـارع نحـو مركز الأرض بالتسارع g. هل قيمة التسارع المركزي g لكوكبنا الصغير المستنتجة من نظرية نيوتن هي نفس القيمة الحقيقية لـg ؟ هذا هو الاختبار الحاسم.

ما هي القيمـة النظـريـة لـ g ؟ لقـد استنتجها نيوتن على النحو التالي. حسب نظريته، تسـارع القمـر وقطعـة الطبـاشـير متناسب عكسيا مع مربع المسافة عن مركز الأرض. أي أن كليهما يحقق القانون (١٤).

$$\text{التسارع المركزي} = \frac{c}{\text{مربع المسافة}} \qquad (١٤')$$

حيث c ثابت تناسب مستقل عن المسافة. لتكن R المسافة بين القمر ومركز الأرض و g_M تسارع القمر نحو الأرض؛ إذن

$$g_M = \frac{c}{R^2} \qquad (١٥)$$

وبنفس الطـريقـة، إذا كانت r نصف قطـر الأرض، أي المسافة من قطعة الطباشير إلى مركز الأرض و g_E تسارع قطعة الطباشير نحو مركز الأرض فإن

$$g_E = \frac{c}{r^2} \qquad (١٥')$$

لنفرض أن مدار القمر حول الأرض مثل مدار المريخ حول الشمس دائري ونستنتج من قانون كبلر الثاني أن حركته دائرية منتظمة وبسرعة v ، ومن (١٢) أن

$$g_M = \frac{v^2}{R}$$

ونستنتج من (١٥)

$$\frac{c}{R^2} = \frac{v^2}{R},$$

إذن

$$c = v^2 R.$$

وبما أن حركة القمر دائرية منتظمة، إذن دورته T تحقق العلاقة

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

بالتربيع والتعويض عن v^2 في المعادلة السابقة نجد

$$c = \frac{(2\pi R)^2}{T^2} \cdot R,$$

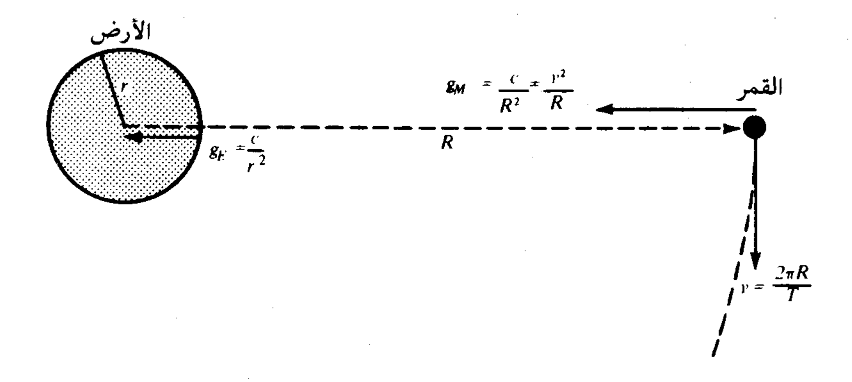
أي أن

$$c = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2}$$

لسوء الحظ لا يمكن قياس c مباشرة، ولكن يمكن قياس g_E . من (١٥`)

$$g_E = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2 r^2} \qquad (١٦)$$

هذا يعطينا التسارع على سطح الأرض بدلالة r ، R وT وكلها معروفة لدى نيوتن. الشكل (٣-٢٤) يوضح الاستنتاج السابق.



شكل (٣-٢٤)

هل تتطـابق قيمـة نيـوتن النظرية لـ g_E مع القيمة المعروفة من التجربة؟ يمكنك التأكد من هذا بنفسك. معلومات نيوتن كالتالي:

نصف قطر الأرض بالأمتار $r = 6.3784 \times 10^6$ meters

المسافة بين القمر والأرض بالأمتار $R = 384.4 \times 10^6$ meters

(إذن بعد القمر عن الأرض يساوي تقريباً نصف قطر الأرض ثلاثين مرة).

ودورة القمر باليوم $T= 27.322$

المعلومات كلها معطاة إلى خمسة أرقام معنوية ما عدا R حيث إنها معطاة إلى أربعة أرقام معنـويـة. إذن نتعـامـل بالخمسة أرقام وتكون الإجابة معنوية إلى أربعة أرقام. ثانياً إذا كنت تعرف تحليل الأبعاد، طبقه على (١٦) لتتأكد من أن g_E من النوعية المناسبة، أي أنها تسارع LT^{-2} . سوف أوضح أهمية تحليل الأبعاد في البند (٣-٣-١) من الجزء الثالث.

سؤ ال آخـر: كيف نحـدد g_E عمليًّا؟ نحددها بتجربة البندول. هذه أيضاً ستُناقش في الجزء الثالث. g_E تساوي ٩,٨٠٦ م/ثا٢.

عندما أكمل نيوتن حساباته، لم تكن إجابته قريبة بصورة كافية من القيمة المعروفة. هذا أخَّر نشر أبحاثه ثماني عشرة سنة. النظرية يجب أن تطابق الحقائق هذه هي الطريقة العلمية.

يجب أن نذكر هنا أن نيوتن كان متردداً في نشر أبحاثه لأسباب شخصية. لقد كان نيوتن حساساً ومتحفظاً وكتوماً إلى حد ما، كان يكره الجدل بشدة ويحق له ذلك. إن نشر كتابه في البصريات في السابق أدى إلى خصام عنيف مع هوك *(Hooke)* الذي كان قاسياً بقدر ما هو رائعاً، وكذلك اكتشاف نيوتن للتفاضل والتكامل أدى إلى حزازات مشابهة مع مكتشفه الآخر ليبنتز. كان نيوتن مترددا في نشر أبحاثه خوفاً من مجادلات جديدة، أضف إلى ذلك الاختلاف بين قيمته المستنتجة لـ g_E والقيمة الحقيقية كل ذلك جعله يحجم عن النشر. لأنه أخطأ في مكان ما لم ينشر وحتى لو أصاب لتردد.

معظم نظرية نيوتن كان منسجما مع الحقائق وهذا جعله يتساءل عن مدى صحة الأرقام التي عوضها في (١٦). دورة القمر T كانت معروفة بدقة لا بأس بها منذ عهد البابليين والاغريق، وقيمتا r وR التي ناقشناها سابقا (راجع ايراتوسثينيس) كانتا معروفتين بصورة تقريبية لدى الاغريق، وبصورة أدق قليلا في عهد نيوتن. لقد قرر أخيرا أن r غير دقيقة، وانتظر حسابها مرة أخرى من قبل حملة علمية فرنسية أرسلت إلى أمريكا الجنوبية لهذا الغرض. حسابهم لقيمة r جعل القيمة النظرية لـ g_E قريبة من القيمة التجريبية؛ النظرية جاهزة الآن للنشر ولكن نيوتن لم يكن مستعدا لذلك. أخيرا تحت إصرار هالي ومساعدته المالية طبع كتابه *(Philosophiae Naturalis Principia Mathematica)*. هل يا ترى يوجد قانون تربيع عكسي للنشر ينص على أن دافع المؤلف للنشر يتناسب عكسيًّا مع مربع قيمة بحثه؟

لابد أن القارىء النبيه لاحظ بعض الأمور التي أهملناها: مثلا، استنتجنا القانون (١٦) بافتراض أن القمر يتحرك في دائرة وبسرعة منتظمة ولكن إذا كانت نظرية نيوتن صحيحة فإن

حركة القمر ستتأثر ولو بشكل طفيف بكل الكواكب والنجوم في جميع المجرات. ثانياً، ما هي القيمة «الصحيحة» لـ g_E ؟ حيث إن الأرض ليست كروية تماماً، إذن r وكذلك g_E تتغير. هناك سبب آخر: دوران الأرض يعطي قطعة الطباشير الساقطة تسارعاً مركزيا طارداً ولذا فإن g_E تتأثر بخط العرض. ويمكنك أن تكتشف أموراً أخرى بنفسك. أليس أمراً مدهشاً أن النماذج المثالية تمكننا من البحث المجدي؟ بدونها، تصبح الطبيعة معقدة جدا بحيث لا يمكن أن نصل إلى قوانينها.

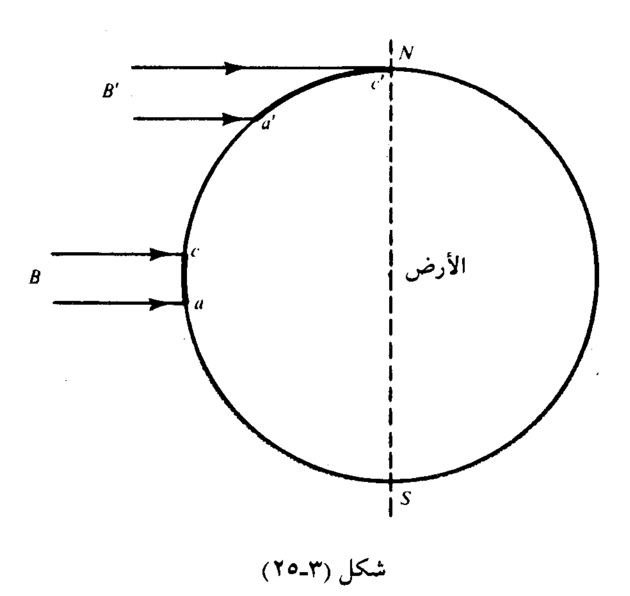
(٣ - ٢ - ٨) الإدراك المتأخر والبصيرة

نيوتن لم يكن أول من افترض قانون التربيع العكسي. أصدقاؤه البارعون أمثال هالي الذي تنبأ بعودة مذنب على أساس من ديناميكا نيوتن وهوك المعروف بقانونه في المرونة والقائل بأن الشد في سلك يتناسب مع الزيادة في طوله ورين *(Wren)* الذي طغت أعماله المعمارية على إنجازاته الرياضية، كل هؤلاء فكروا في القانون نفسه. الفرق هو أن هؤلاء لم تكن لديهم البصيرة والقدرة الرياضية الضرورية لربط القانون بقوانين كبلر. نيوتن أدار المفتاح ورفاقه لم يستطيعوا؛ لم يستطيعوا أن يجدوا مفتاحاً يديرونه. باستعادة الأحداث الماضية، نظرية نيوتن تبدو واضحة. كيف يمكن أن تكون غير ذلك؟ نعم، إذا أُعطينا المفتاح وطريقة فتح القفل، الباقي سهل. قد يحلو لنا القول بأن هالي وهوك ورين عثروا على المفتاح ولكن هذا مضلل في الحقيقة؟ ما فائدة مفتاح لا تجد قفلاً يناسبه؟.

كبلر أيضاً فكر في قانون التربيع العكسي، بل هو أول من فكر فيه. إنه شيء مشوق أن نرى كيف توصل إليه وبالخصوص كيف رفضه.

اعتقد كبلر أن الجاذبية مشابهة لانتشار الضوء. الشبيه هنا هو شدة الضوء. دعونا نعطي المقدمة الضرورية.

من المعروف أن الشمس تبعث الضوء الذي بدونه تصبح الحياة على الأرض مستحيلة. الطقس مرتبط بخطوط العرض، حيث إن زاوية سقوط أشعة الشمس تعتمد عليها، وعلى الزاوية تعتمد المساحة التي ينتشر عليها الضوء. انظر الشكل (٣-٢٥).



شكل (٣-٢٥)

لما كانت الشمس بعيدة جدا عن الأرض فيمكن اعتبار أشعتها مثل B و B' متوازية. وبافتراض الشيء الطبيعي وهو أن الشمس تبعث الضوء بصورة متساوية في جميع الاتجاهات، فإن الأشعة B و B' إذا كانت متساوية السمك ستحتوي على كميات متساوية من ضوء الشمس. الكميات المتساوية يمكن توزيعها على مساحات غير متساوية حيث إنه من الواضح أن ac أقل من $a'c'$. لذا فإن المناطق الاستوائية أحر من المناطق القطبية. وهكذا نحصل على المفهوم

$$\text{شدة ضوء الشمس} = \frac{\text{كمية الضوء}}{\text{المساحة}}$$

لكن ٢٠ وحدة من الضوء الساقط بانتظام على ٢سم مربع تعطي ١٠ وحدات لكل سم مربع ، أي

الشدة = كمية الضوء لوحدة المساحة

ليس من الضروري أن ندرس بالتفصيل كيف تقاس كمية الضوء ولا وحداتها لكي نفهم أفكار كبلر.

خذ الآن شدة الضوء الساقط على كوكب P يبعد عن الشمس مسافة R. لتكن S كمية الضـوء الكليـة المنبعثـة من الشمس. أيضـا نفرض أن هذه الكمية تنبعث بالتساوي في جميع الاتجـاهـات ولـذا فإن الشدة متساوية عند جميع النقاط التي تبعد مسافة R من الشمس. لكن هذه النقاط تشكل غشاء كرويًا مركزه الشمس ونصف قطره R ومساحته $4\pi R^2$.

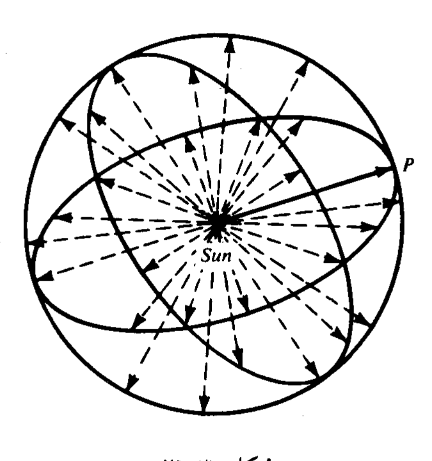
إذن

شدة الضوء عند P = $\frac{S}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2}$

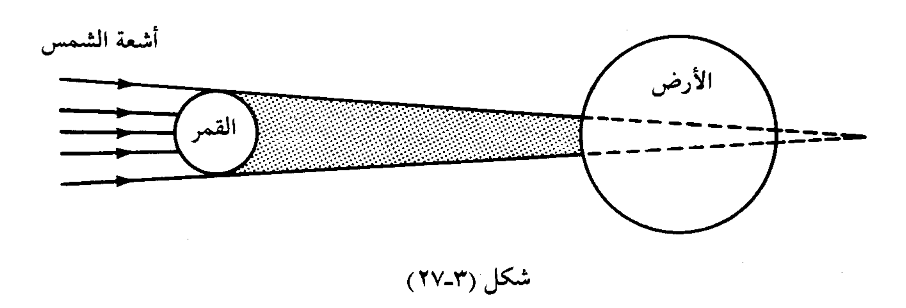
أي أن الشدة تتناسب عكسيا مع مربع المسافة بين الكوكب P والشمس. انظر الشكل (٣-٢٦).

بما أن الضوء ينتشر من الشمس حسب قانون التربيع العكسي ، أليس ممكناً أن الجاذبية «تنتشـر» بنفس الطـريقـة؟ لقـد فكـر كبلر كثـيراً في الموضوع ولكنه كان متردداً ولذا فقد فوّت اكتشـافـا عظيـماً. لقـد شك في الفكـرة لسبب جيـد جدا. ما هوهذا السبب؟ أثنـاء كسـوف الشمس يحجب القمر أشعة الشمس عن جزء من الأرض ولكنه لا يحدث أي اختلال في حركة الأرض. لو انتشرت قوى الجاذبية مثل انتشار الضوء فإن قوة الجاذبية ستُحجب مؤقتاً بواسطة

القمر ولذا فإن الأرض ستتخلى عن المدار البيضاوي حول الشمس أثناء الخسوف. ولكن هذا لا يحدث. إذن الجاذبية لا تنتشر مثل انتشار الضوء. انظر الشكل (٣-٢٧).



شكل (٣-٢٦)



شكل (٣-٢٧)

محاكمة كبلر جيدة، لا تجعل إدراكك الآن يجعلك تتحامل ضدها. المغفل يصبح حكيماً بعد الحادثة. حاول أن تنظر للمسألة من جديد. قدرة الشمس على إبقاء الأرض في مدارها وقدرة الأرض على إبقاء القمر في مداره بدون أية مادة تربط بينها يعتبر أمرا غامضا للغاية. لقد قُدِّر أنه لو رُبطت الأرض والقمر بواسطة سلك من الصلب مقطعه يساوي قطر القمر فإنه لا يكفي لاستبدال جاذبية الأرض للقمر. كيف يمكن للفضاء أن يكون أقوى من الصلب؟ إن هذا أغرب من الخيال.

إن من يعتقد أن القمر يبقى في مداره بواسطة قوة تنتقل عبر الفراغ إما أن يكون مجنوناً أو عبقرياً. كبلر لم يكن مجنوناً ورفض فكرة قانون التربيع العكسي؛ نيوتن لم يكن مجنوناً وقبل الفكرة نفسها. نتيجة كبلر كانت صحيحة بالنسبة لفهمه الجزئي للمشكلة. نيوتن كان محقًّا لأنه لم يُخدع بما نسميه الضوء. لقد فهم ما لم يستطع أن يفهمه كبلر؛ وهو أنه حسب قانون جاليليو للقصور الذاتي، الجسم الذي يدور لابد أن يتسارع في الاتجاه المقعر من مساره وبذا نعود إلى التفاحة الساقطة والقذيفة والقمر.

كلنا نعرف بقية القصة ـ استخدام نيوتن لقوانين كبلر الثلاثة. ولكن من الخطأ الاعتقاد أن أعمال كبلر تعرض قوانينه بسهولة. لقد كانت مثل الحرباء معروضة في إطار خداع. كبلر كان آخر المنتمين إلى تقاليد فيثاغورس وكان طموحه العظيم هو أن يفسر الكون كله بتجميع شامل للهندسة والموسيقى والتنجيم والفلك ونظرية المعرفة. أما نيوتن فكان أقل طموحاً. في كتاب كبلر *Harmony of the World* (١٦١٨) الذي يكمل كتابه (١٥٩٧) *Cosmic Mystery* والذي يمثل الذروة في الهاجس الذي استمر طوال حياته لإثبات تناسق الكواكب السيارة (للتفاصيل راجع مرة أخرى كتاب *The Watershed*) نجد أن قوانينه لا تمثل إلا جزءاً يسيراً من أمور كثيرة كانت نتاج تيار أفكاره التي لا تهدأ. كان على نيوتن أن يبحث وينقب.

ما هي أفضل طريقة نتذكر بها نيوتن؟ صديقه كريستوفر رين، معماري كاثيدرائية سانت بول ومجموعة أخرى من المباني الشهيرة كان مغرماً بترديد الجملة «إذا أردت أن ترى آثاري، انظر حولك». لو كان رين حيًّا ليقول الجملة لنيوتن اليوم، يمكننا أن نتخيل الأخير يرد بهز كتفيه استهجاناً متبوعاً بهزة رأس ماكرة إلى سبوتنيك، لونيك، بايونير وغيرها من الأقمار الصناعية. إن آثاره تزداد يوميًّا.

الجزء الثالث: البندول

لسببين رئيسيين نبدأ هذا الجزء بالبندول العادي الذي يجعل الساعة تدق تيك توك، تيك توك، والـذي استعمله جاليليـو في تجاربـه الآنفة الذكر: السبب الأول هو أن استنتاج القانون الصحيح لفترة الذبذبة هو المثال الكلاسيكي لطريقة اختبار الأبعاد والسبب الثاني هو أن هذا القانون أساسي للتحقق من قانون نيوتن للجاذبية عن طريق تعيين g بالبندول.

(٣ - ٣ - ١) اختبار الأبعاد (Dimensional Analysis)

هذا الاختبـار يضمن لنـا أن القـانـون معقول وأن الكمية الواقعة على الطرف الأيسر من معادلة ما، هي من نفس نوع الكمية على الطرف الأيمن. مثلا، لنفرض أن شخصا خمن أن حجم الكرة يساوي

$$v = c \cdot r^2$$

حيث v الحجم، r نصف قطر الكرة وc ثابت. بما أن r طول إذن r^2 مساحة و $c \cdot r^2$ مساحة أكـبر أو أصغـر من r^2 حسب ما إذا كانت c أكـبر أو أصغـر من الـوحدة. باختصار، القانون المقترح ينص على أن حجماً يساوي مساحة أو أن كمية تقاس بالوحدات المكعبة تساوي كمية تقاس بالوحدات المربعة. أليس هذا أمر غير معقول؟ الكميات من نوعيات مختلفة.
قارن هذا القانون للحجم v بالقانون

$$v = c \cdot r^3$$

هنـا كل من v و $c \cdot r^3$ تقـاس بوحـدات مكعبة، أي أن الكميات من نفس النوع ولذا يمكن مقـارنتهـا ببعض. القـانون من النوعية الصحيحة. إذا كانت $c = 4\pi/3$ فإننا نحصل على القـانـون الصحيـح من النـوعية الصحيحة ولكن لاحظ أننا لو جعلنا c أي عدد آخر مثل 16π فإن القـانـون يبقى معقـولاً. القـانون مع ذلك خاطىء، لدينا الآن قانون خاطىء من

النـوعيـة الصحيحـة. يمكن تصور أن $c = 16\pi$ ولكن الشيء الذي لا يمكن تصوره هو أن ندعي مثلاً أن

$$v = 16\pi \cdot r^2$$

أو

$$v = \frac{4}{3}\pi \cdot r^2.$$

إنـه شيء لا معنى له أن نقـول إن حجـماً يسـاوي مسـاحة. لا يمكن مقارنة كميات من نوعيات مختلفة. هذا مثل المراهق الذي يقول إن عمره أربعة عشر كيلوجراما، لقد خلط بين فصيلتين مختلفتين.

اختبـار الأبعـاد بمثـابة علم النحو المنطقي الأساسي للفيزياء. مع الأسف، الاختبار لا يضمن أن معـادلاتنـا صحيحة ولكنه يضمن كونها معقولة، أي إمكانية كونها صحيحة. جميع المفـاهيم الـديناميكية مثل السرعة، التسارع، القوة، الدفع، الشغل، كمية الحركة، الطاقة يمكن تعريفها بدلالة ثلاثة مفاهيم أساسية على الأكثر هي الطول والكتلة والزمن. مثلاً،

$$\text{الطاقة الحركية} = \frac{1}{2}mv^2$$

حيث m الكتلة وv السـرعـة. ولكن السـرعة معرفة بالإزاحة أو الطول لوحدة الزمن. إذا كانت L ، M ، T تمثل الطول، الكتلة والزمن على الترتيب فإن السرعة تصبح

$$\frac{L}{T} \quad \text{أو} \quad L \cdot T^{-1}$$

بُعد الطول هنا 1 وبُعد الزمن -1 ، وإذا أردت زيادة في الدقة يمكن القول بأن بُعد الكتلة صفر ونكتب هذا في الصورة

$$L^1 \cdot M^0 \cdot T^{-1}$$

إذن v^2 تصبح

$$(L^1 \cdot M^0 \cdot T^{-1})^2 \quad \text{أو} \quad L^2 \cdot M^0 \cdot T^{-2}$$

والطاقة الحركية

$$(\tfrac{1}{2}M) \cdot L^2 \cdot M^0 \cdot T^{-2}$$

بعد ترتيب الأحرف وإهمال الرقم $\frac{1}{2}$ حيث إنه يؤثر على مقدار الكمية فقط وليس على نوعيتها نحصل على

$$L^2 M^1 T^{-2}$$

الآن نفحص أبعاد (١٦)، القانون الهام في عمل نيوتن، بما أن التسارع يقاس بالوحدات سم/ثا٢، إذن أبعاد التسارع g_E تكتب

$$L^1 \cdot T^{-2} \quad \text{أو} \quad \frac{L}{T^2}$$

كذلك

$$\frac{4\pi^2 R^3}{T^2 r^2} = \frac{L^3}{T^2 \cdot L^2} = \frac{L}{T^2}$$

أو

$$L^1 T^{-2}$$

وهذا يحقق الاختبار. الاختبار لا يثبت أن القانون صحيح ولكنه يثبت أنه من النوعية الصحيحة وأنه معقول. لو أخفق الاختبار في هذه الحالة لأصبح القانون غير معقول. الاختبار شرط ضروري ولكنه غير كاف للقوانين الصحيحة.

لتلخيص ما سبق نقول إن أي كمية فيزيائية Q لها أبعادها الأساسية α ، β و γ للطول والكتلة والزمن (ولا يوجد غير هذه الثلاثة). بيانيا نكتب

$$Q = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}.$$

وإذا كانت

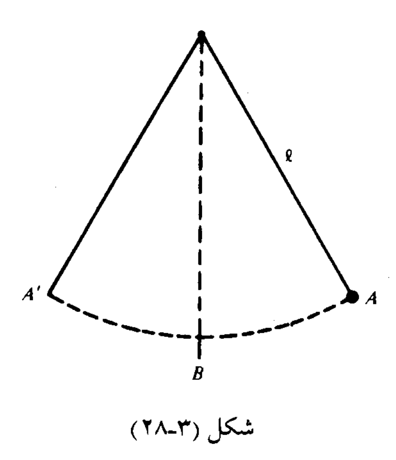
$$Q' = L^{\alpha'} M^{\beta'} T^{\gamma'}$$

فإن الكميتين Q و Q' من نفس النوعية (ليس لهما نفس المقدار بالضرورة) إذا وإذا فقط كانت

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \text{and} \quad \gamma = \gamma'.$$

(٣ ـ ٣ ـ ٢) دورة البندول البسيط

كالمعتـاد نفـترض أوضاعاً مثالية ونهمل مقاومة الهواء ووزن الخيط وأبعاد الكرة. يجب أن تكـون الكـرة ثقيلة، لو استبـدلنـا الكـرة بريشة فإن مقاومة الهواء لا يمكن إهمالها. نفرض أن طول الخيط l . انظر الشكل (٣ـ٢٨).



شكل (٣ـ٢٨)

نريد حساب T زمن الذبذبة أو دورة الذبذبة. هذا يعني الزمن اللازم لإتمام حركة كاملة من A إلى A' ثم إلى A مرة أخرى مثل ما تفعل الساعة عندما تدق تيك ـ توك ـ تيك. هذه

الملاحظة هامة حيث الكثير من الكتب تعطي القانون لنصف ذبذبة ؛ تيك ـ توك وبدون تيك التالية .

على ماذا تعتمد T ، علينا أن نخمن أولاً ؛ علينا أن نصطاد الأرنب قبل أن نتمكن من طبخه .

لنبـدأ بما نعـرفـه من فيـزيـاء الفطرة . ألا يوجد تشابه بين تأرجح البندول وتأرجح الرِّجل عندما نمشي ؟ حتى في بلاد السيارات هذه ، السائقون يصبحون مشاة ليصلوا إلى سياراتهم . ألم تتـوقف أبـداً عنـد مفرق طريق لتلاحظ كيف يمشي الناس ؟ الظاهر أن أرسطو فعل هذا ـ فقد لاحظ أن هناك حدا أدنى للسرعة التي يمشي بها شخص ما . كذلك يوجد سرعة مريحة لكل ماش وذلك عندما يكون التأرجح طبيعيًّا وغير متكلف ؛ الأرجل القصيرة تتأرجح طبيعيًّا أسرع من الأرجل الطويلة . ألا يدلنا هذا على أن زمن تأرجح البندول يعتمد على طول رجله؟ .

أبسط افتراض وهو أن T تتناسب طردياً مع l يمكن نفيه بأقل قدر من التجارب . حقًّا T تعتمد على l ولكن ما هي أبسط علاقة ممكنة؟ لنفرض أن T تتناسب مع إحدى قوى l ولتكن l^{α} .

على أي شيء آخـر تعتمـد T ؟ هل تعتمـد على كتلة الكرة؟ بالتجربة ، إذا جعلنا l ثابتة والكرة ثقيلة بحيث تصبح مقاومة الهواء صغيرة فإننا نجد أن كتلة الكرة لا تؤثر على T .

هل يوجـد شيء آخـر؟ إذا لم يكن لدينـا مجال جاذبيـة فإن البندول لا يتأرجح أبداً . إذن نتوقع أن يكون التأرجح بطيئاً جدًّا إذا كان مجال الجاذبية ضعيفاً . أليس من المعقول افتراض

أن T تصغر إذا زادت g ؟ لكن العلاقة ليست علاقة عكسية بسيطة بالضرورة؛ إذن نفرض أن T تتناسب مع g^β حيث β سالبة.

الآن أصبح لدينا أساس لتخمين أن T تتناسب مع l^α وg^β ولكنها مستقلة عن كتلة الكرة، أي

$$T = cl^\alpha g^\beta$$

هل أخذنا جميع العوامل التي لها صلة بالموضوع في الاعتبار؟ حيث إننا لا نرى أي عوامل أخرى في الوقت الحاضر، دعونا نطبق اختبار الأبعاد على هذه المعادلة.

بيانيًّا، الطرف الأيسر من المعادلة يساوي

$$T = L^0M^0T^1$$

ماذا عن الطرف الأيمن؟ c عدد مطلق ويؤثر في المقدار وليس في النوعية ولذا نهمله. g تقاس بالوحدة سم/ثا٢، وتكون أبعادها مثل التسارع LT^{-2}.

إذن

$$\begin{aligned} cl^\alpha g^\beta &= L^\alpha (LT^{-2})^\beta \\ &= L^\alpha (L^\beta T^{-2\beta}) \\ &= L^{\alpha+\beta} \cdot T^{-2\beta} \end{aligned}$$

ولنجعل القانون مستقلاً عن الكتلة بشكل صريح، نكتب

$$L^{\alpha+\beta}M^0T^{-2\beta}$$

إذن يكون لـ T و $cl^{\alpha}g^{\beta}$ نفس بُعد الطول (راجع البند (٣-٣-١)) إذا كان

$$0 = \alpha + \beta$$

ونفس بعد الزمن إذا كان

$$1 = -2\beta$$

(لاحظ أن لهما نفس بُعد الكتلة صفر). من المعادلة الأخيرة نجد أن

$$\beta = -\tfrac{1}{2}$$

وهذا عدد سالب كما توقعنا، ومن المعادلة الأولى

$$\alpha = +\tfrac{1}{2}$$

وهذا يعطينا

$$T = cl^{1/2}g^{-1/2}$$

أي

$$T = c\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (١٧)$$

لقد كان تخميننا جريئاً ولكن أسوأ ما يمكن أن يحدث هو أن نكون على خطأ ونفكر من جديد. لقد كان تخميننا موفقاً ولم يبق إلا تحديد الثابت c. الكثير من الباحثين في الديناميكا لم يفلحوا في إيجاد قانون T. لقد أوشك جاليليو على حل المشكلة ولكنه لم ينجح تماماً. الحل الكامل يتطلب استعمال المعادلات التفاضلية. أخيرا استنتج هايجينز *(Heygens)* القانون ولكن الاستنتاج لم يكن دقيقاً حيث لم تكن معلوماته في التفاضل والتكامل كافية لاستنتاج

صريح وكامل. لقد ظهر أن $c = 2\pi$ ، وأن القانون صحيح إذا كانت الذبذبات صغيرة. لا يجوز مثلاً أن يتأرجح البندول في نصف دائرة، ولكن عندما لا يبتعد خيط البندول عن الرأسي بأكثر من درجات قليلة فإن القانون يعطي نتائج دقيقة للغاية وصالحة للاستخدامات العلمية.
إذن للذبذبة الصغيرة نجد أن

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (١٨)$$

(٣ ـ ٣ ـ ٣) تحديد g من تجربة البندول

للحصول على صيغة لـ g ، نربع (١٨)

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

إذن

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \qquad (١٩)$$

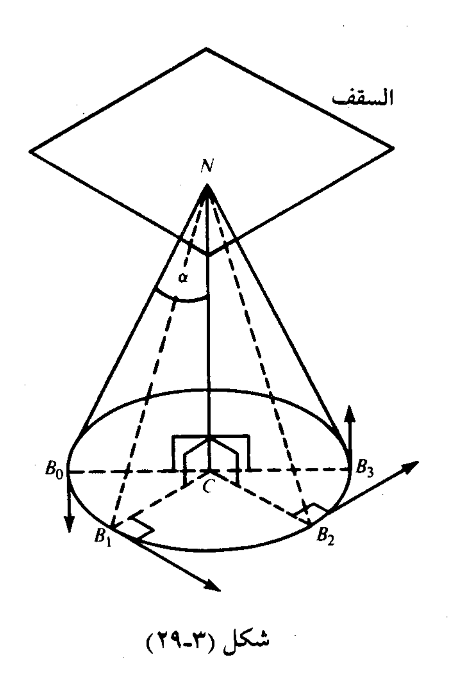
إذن يمكن حساب الثابت g الضروري للتحقق من نظرية نيوتن عمليًا وذلك بملاحظة دورة البندول.

قياس l ليس مشكلة، ولكن كيف نقيس T بدقة؟ واضح، أننا لو أخذنا واحداً على مائة من الوقت اللازم لمائة ذبذبة كاملة لكان أفضل من قياس الوقت اللازم لذبذبة واحدة، حيث إن الخطأ في التوقيت يتوزع على مائة ملاحظة. ولتعيين عودة الكرة إلى مكان سابق يستحسن أن نفحصها على الخط الشعري لتلسكوب. لا يجوز وضع الخط الشعري عند A (راجع الشكل ٣ـ٢٨) حيث إن مقاومة الهواء مهما كانت صغيرة لابد وأن تقلل من سعة

الـذبـذبـة. المكـان المناسب للشعرة هو B على الخط الرأسي المار بنقطة تعليق الكرة حيث إن الحركة كما نعرف من تجارب جاليليو متماثلة حوله.

(٣ - ٣ - ٤) البندول المخروطي

إن تحديد الدورة T للبندول المخروطي مسألة مشابهة لتحديد T للبندول البسيط وميزتها هو أننا نستطيع حلها بواسطة الميكانيكا التي درسناها.



شكل (٣-٢٩)

أولا، ما هو البندول المخروطي؟ الجهاز هو نفس جهاز البندول البسيط، الفرق الوحيد هو مسـار الكـرة. إذا تذبـذبت الكرة على قوس دائرة رأسية فإن البندول بسيط؛ أما إذا دارت الكـرة في دائـرة أفقيـة فإن البندول مخروطي. لنفرض أن كرة B معلقة من مسمار N في السقف بواسطـة خيـط NB، ولتكن C قاعـدة العمـود في المستوي الأفقي والمار في نقطة البداية للكرة B_0. انظر الشكل (٣-٢٩). إذا بدأت B من السكون فإنها تتحرك على قوس من B_0 على

الدائرة التي مركزها N ونصف قطرها NB_0 في المستوي الرأسي NB_0C ويصبح لدينا بندول بسيـط . إذا أعطيت B دفعـة منـاسبـة في اتجاه أفقي وعمودي على B_0C ، فإنها تدور في دائرة مركـــزهـا C ونصف قطـرهـا B_0C في المستـوي الأفقي المـار في B_0 ، ونحصـل على بنـدول مخروطي . عنـــدمـــا تدور B حول C فإن NB يرسم المسـاحـة الجـانبيـة لمخـروط ؛ إذن صفـة المخروطي مناسبة .

كما ذكـرنـا سابقـاً الجهـاز بسيط ورخيص . هذه تجربة لا تكلف شيئا ويمكنك عملها إذا وُجد سقف فوق رأسك . وعلى العكس من تجارب ـ اعمل مفاعلك الذري ـ لا يوجد خطر من إحراق البيت أو من تفجير السقف ؛ التجربة غير خطرة ولكنها مفيدة .

وحتى بدون إجراء أية تجارب ، نحن نعرف بعض النتائج من ميكانيكا الفطرة . لنفرض أن B تأخذ مداراً دائريًّا بحيث يميل NB بزاوية α على NC الرأسي ، أي أن α هي نصف الـزاويـة الـرأسيـة للمخروط الناتج من الخيط . إذا بقي طول الخيط ثابتاً وزادت α فهل يزيد زمن دوران الكـرة T أوينقص؟ نستطيـع أن نحس بجـزء من الإجـابة بواسطة عضلاتنا ؛ كلما اقترب مستوى دوران B من السقف ، احتجنا إلى دفع أكبر في البداية . هل يمكن أن نجعل B تدور في مستوى السقف؟ ألا تحس بالوضع؟ لا ، ليس في مستوى السقف . لكي تدور B في مستـو قريب من السقف نحتـاج إلى دفـع هائل في البداية . ألا تحس بألم في عضلاتك بمجرد التفكير في هذا؟ إذا دفعت الكرة بقوة كبيرة في البداية فإنها تدور بسرعة كبيرة أيضاً . نستنتج من هذا أنـــه كلما اقـتر بت α من الـزاويـة ٩٠° فإن T تقـترب من الصفـر . إذن T تـعـتـمـد عــلى α .

وعلى أي شيء آخـر تعتمـد T ؟ خذ حالـة نهائية . إذا كانت الجاذبية معدومة وبدأت B تدور في مستوى السقف فإنها تستمر في هذا المدار حيث لا توجد قوة تسحبها إلى أسفل . إذن نتوقع أن تعتمد T على g أيضاً .

الآن نفرض أن α ثابتة وطول الخيط l يزداد. عندما تزيد l فإن نصف قطر دائرة دوران B يزداد. إذا كان الخيط قصيراً، بوصة أو بوصتين، هل تحتاج B إلى دفع أصغر أو أكبر عما لو كان طول الخيط عدة أقدام؟ عضلاتك تخبرك أن الخيط الأطول يحتاج إلى قوة أكبر. كلما زادت القوة، زادت السرعة. لكن هناك بعض الأشكال؛ إذا طال الخيط، زاد محيط دائرة الدوران. إذن إذا زادت المسافة التي تقطعها الكرة قبل أن تكمل دورة واحدة، زادت سرعتها. هل زيادة السرعة تعوض عن الزيادة في المسافة أم لا؟ هل تتناقص T مع الزيادة في l أم أنها تتزايد؟ الشيء المستبعد هو أن الزيادة في السرعة مع الزيادة في l تعوض تماماً الزيادة في المسافة وتجعل T مستقلة عن l .

باختصار يظهر أن T تعتمد على l وg و α. إذا تذكرنا قانون T في حالة البندول البسيط وكذلك اختبار الأبعاد، أليس من المعقول أن تكون الدورة في حالة البندول المخروطي من الصورة

$$T = c \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot f(\alpha)$$

حيث بُعد $f(\alpha)$ يساوي صفراً؟ على هذا الأساس، يتضح أن الصياغة الصحيحة لمسألتنا هي: أوجد T إذا علمت α ، g ، l .

راجع الشكل (٣-٢٩). واضح أن مكان بداية الدوران B_0 ، B_1 ، أو B_2 لا يمثل أية أهمية. القوى المؤثرة على B في البداية هي التي تؤثر فيها بعد. على أساس مبدأ السبب الكافي (أو غير الكافي) لا يوجد أي مانع من الحركة المنتظمة. إذن حركة B دائرية منتظمة. نتذكر ما قاله نيوتن عن التسارع المركزي وعليه فإن B تتسارع مركزيًا وحسب هودوغراف هاملتون.

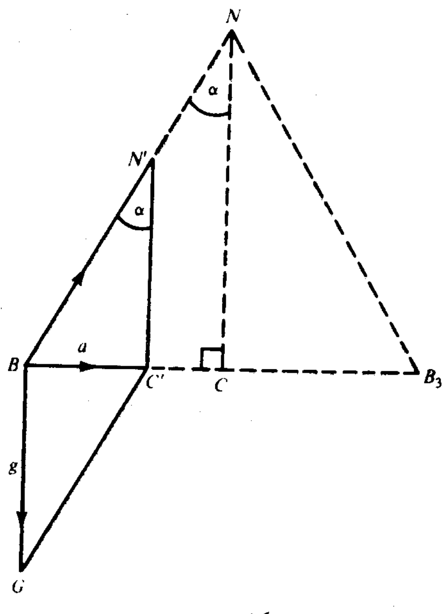
$$a = \frac{v^2}{r}$$

حيث v السرعة الأفقية الابتدائية العمودية على B_0C و $r = B_0C$.

لكن ما سبب هذا التسارع؟ g تؤثر رأسيًا إلى أسفل وليس لها مركبة أفقية ؛ لابد من وجود قوة ثانية . إذا لم يثبت المسمار N في السقف جيداً فإنه ينحلّ بسبب الحركة . يوجد شد في الخيط . إذن التسارع a محصلة قوتين تؤثران على B ؛ g رأسية إلى أسفل والشد مائل إلى أعلى . نكمل متوازي أضلاع القوى : انظر الشكل (٣-٣٠) . من هندسة الشكل $BG = N'C'$ ومن المثلث القائم الزاوية $BN'C'$ نجد

$$\tan \alpha = \frac{a}{g}$$

لقد ربطنا a بهندسة الشكل .



شكل (٣-٣٠)

تذكر أن مشكلتنا الأساسية هي إيجاد T بدلالة α ، l و g. حتى الآن لم نحصل على ما نريد وهو معادلة تحتوي على T ، ولازلنا نريد التخلص من v و r . علينا أن نُدخل T ونحذف

v وr . هل يمكن قتـل عصفـورين بحجـر واحد؟ بما أن الحركة دائرية منتظمة و $2\pi r$ محيط دائرة الدوران التي نصف قطرها r إذن

$$v = \frac{2\pi r}{T} .$$

هل لدينـا الآن معـادلات كافيـة لحسـاب T ؟ إن حل المسـائـل موضـوع هام بالنسبـة للرياضيين، أما تحويل المسائل الكلامية إلى قوانين فهذا يهم الكثير حتى من غير الرياضيين (مثـل المهنـدسـين والكيميائيين)، كل هذا يجعلنا نركز على دور معادلاتنا وكيف توصلنا إليها وذلك عن طريق تصنيفها كالتالي

من الديناميكا: المعادلة الأساسية	$a = \frac{v^2}{r}$
من هندسة مثلث المتجهات	$\tan \alpha = \frac{a}{g}$
حيث إن v ثابتة	$v = \frac{2\pi r}{T}$

كم عدد الكميات هنا؟ ست وهي a ، v ، r ، α ، g وT. أي منها معلوم؟ إثنتان α وg ويبقى أربعـة مجاهيـل. يهمنـا بالـدرجة الأولى T ، أما a ، v وr فهي كميات مساعدة. ولكن هذا لا يغير من الحقيقة شيئاً. وهي أن لدينا أربعة مجاهيل وثلاث معادلات فقط. نحتاج إلى معادلة رابعة.

ما هي الكميـات التي نحتـاجهـا في المعادلة الرابعة؟ في الرياضيات إن لم يكن في علم ما وراء الطبيعة، على المرء أن يكون واضحاً حول ما يفعله. نرجع إلى مشكلتنا الأساسية وهي:

α ، g ، l معلومة أوجد T .

لاحـظ أن قائمتنـا السـابقة بالست كميات لا تشتمل على l . مع أن l معطاة إلا أننا لم نأخذها. نراجع الشكل (٣-٣٠) ونجد علاقة واضحة تحتوي على l وهي

$$\sin \alpha = \frac{r}{l}$$

حصلنا الآن على معادلة رابعة تحتوي على l ولكن بدون إدخال أية مجاهيل جديدة. أصبح لدينا أربع معادلات وأربعة مجاهيل ويمكننا الآن حساب T.

أنا شخصيا أعتقد أنه لا يوجد شيء أهم في تدريس الرياضيات لطلاب المرحلة الثانوية من القدرة على تحويل المسائل إلى معادلات. إننا نعيش في مجتمع تكنولوجي سواء أردنا ذلك أم لا. مع أن الطالب العادي لن يصبح رياضيا محترفاً، إلا أن مجال تخصصه إذا كان قريباً من العلوم سيضطـره إلى قراءة وفهم الكتب المـدرسيـة، المجـلات والمقـالات المليئـة بالقـوانـين الرياضية. وإذا كان يريد أن يسهم في مجال تخصصه، فإنه على الأقل في حاجة إلى أن يكتب معادلات مماثلة بنفسه. إنه ليس من طبيعة الإنسان العاقل أن يبقى متفرجاً على الحياة.

أعيد وأكرر نقطة لأنني أعتقد أن أهميتها تبر ر تكرارها: بدون أن يفهم المرء ما هي المسألة ومـا هي الأمـور التي لها صلة بالمسألـة وبـدون ترجمتهـا من كلمات إلى معادلات فإنه لا يوجد تعليم للرياضيات. كون معظم المسائل الكلامية في الكتب الدراسية المعتادة ممل وبدون فائدة لا يبطل وجهة نظري: طبعاً ـ المسائل يجب أن تكون جيدة ومنتقاة بعناية. أليس أمراً هامًّا أن كلًّا من نيوتن وأويلر وديكارت فكّر وكتب عن حل «المسائل الكلامية» وكتابة المعادلات، حتى قبل ولادة التكنولوجيا؟

الآن نعود إلى حساب T. من المعادلة الثانية في الجدول،

$$g \tan \alpha = a.$$

بالتعويض عن a في المعادلة الأولى، نحصل على

$$g \tan \alpha = \frac{v^2}{r}.$$

نربع المعادلة الثالثة ونعوض عن v^2 ونجد

$$g \tan \alpha = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r,$$

إذن

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g \tan \alpha} \cdot r.$$

وأخيراً من المعادلة الرابعة،

$$r = l \sin \alpha,$$

إذن

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g \cdot \tan \alpha} \cdot l \sin \alpha = 4\pi^2 \cdot \frac{l \cos \alpha}{g}$$

ومنه نحصل على

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \cdot \cos \alpha}\,. \qquad (٢٠)$$

بما أن (٢٠) من الصيغة

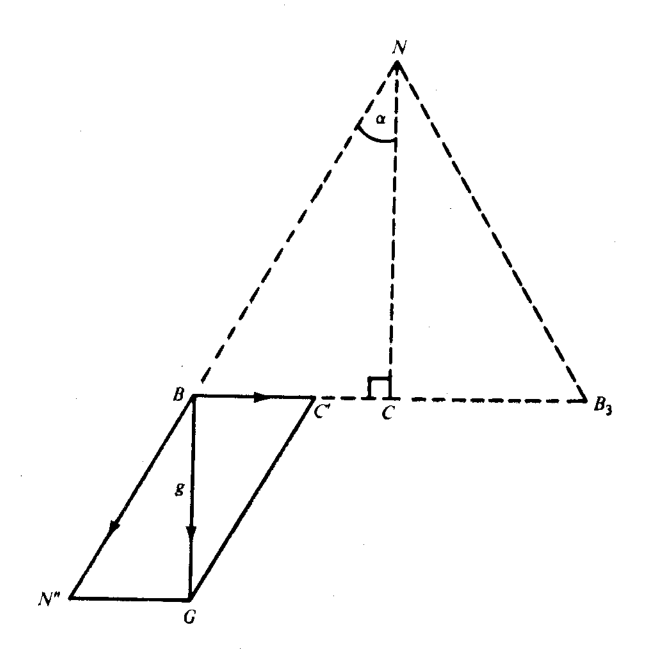
$$T = c\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot f(\alpha),$$

بما أن $f(\alpha) = \sqrt{\cos \alpha}$ وبعدها صفر إذن هذا يؤكد تخميننا.

هذه نتيجة لـ(٢٠): عندما تقترب α من ٩٠° فإن $\cos \alpha$ وكذلك T تقتربان من الصفر. لكي تدور الكرة في مستوى السقف يجب أن تصبح سرعتها لا نهائية. الاستنتاج الرياضي يؤيد الإحساس العضلي.

وماذا عن الحالة النهائية الأخرى؟ إذا اقتربت α من الصفر فإن $\cos \alpha$ تقترب من الواحد وT تقترب من $2\pi\sqrt{l/g}$. إذا أصبحت زاوية الدوران صغيرة جدًّا فإن الدورة تساوي دورة البندول البسيط. شيء غريب.

في الختام، لاحظ أهمية البندول المخروطي لنظرية نيوتن. هذا دليل بسيط على ضرورة التسارع المركزي للحركة الدائرية المنتظمة والتي تمثل حالة نهائية لحركة الكواكب. راجع وضع الشكل (٣-٣٠) كما في الشكل (٣-٣١). قوة الجاذبية g المؤثرة على B يمكن تحليلها إلى القوة $\overrightarrow{BN'}$ على طول NB والقوة $\overrightarrow{BC'}$ على طول BC كما هو موضح بمتوازي أضلاع القوى. المركبة الأولى تجعل الخيط مشدوداً. ماذا عن القوة الأخرى على امتداد BC ؟ هذه تعطي التسارع المركزي الضروري للحركة الدائرية المنتظمة.



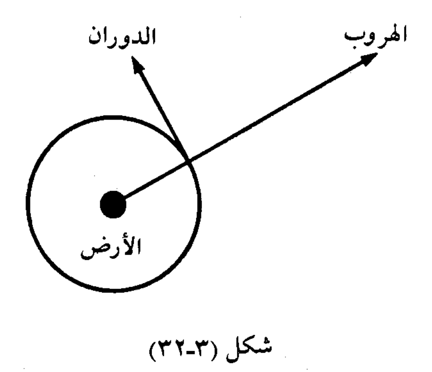
شكل (٣-٣١)

الجزء الرابع : سرعة الهروب

بالـرغم من العنـوان ، هذا الجـزء ليس عن هروب المتهمين من السجون . موضوعنا أكثر تشويقا ، إنه عن السرعة اللازمة لمركبة فضاء لكي تهرب من جاذبية الأرض . إن المتهمين كانوا يهربون من السجون منذ أن وجدت سجون لكي يهربوا منها ولكن فقط في السنوات الأخيرة تقـدمت التكنـولـوجيـا بحيث أمكن الـوصـول إلى سرعـات عاليـة جدًّا كافية لوضع أقمار في مدارات حول الأرض وإرسـال صواريـخ إلى القمـر والفضـاء الخارجي . ما كان خيالا أصبح حقيقـة ، لقـد صُوِّر الـوجـه الآخـر للقمـر. سبـاق الفضاء حل محل الكثير مما يهم العامة مثل الأحداث الرياضية العالمية ؛ إننا نعيش في عصر الأقمار الصناعية .

إن القذائف تطلق إلى الفضاء بشكل متزايد ، الطلاب تثيرهم الصحف وأخبار الراديو والتليفـزيـون ، ويـريـدون المـزيد . الطلاب الجيدون يسألون أسئلة جيدة ، أسئلة عن علاقة الرياضيات بالسفر إلى الفضاء . الإجابة على الكثير من هذه الأسئلة مجموعة من المعادلات التفـاضليـة العـويصـة ، ولكن لحسن الحـظ يوجـد بعض المواضيع الميكانيكية القابلة لمعالجة بسيطة . أحد هذه المواضيع البسيطة سرعة مركبة فضائية والتي سنعالجها الآن .

أولا ، نفرق بين سرعة الهروب والسرعة المدارية ، السرعة المدارية تعني سرعة قمر في مدار حول الأرض ، أما سرعة الهروب فهي السرعة اللازمة ليهرب الجسم من مجال جاذبية الأرض للفضـاء الخـارجي . انظـر الشكـل (٣-٣٢) . أي السرعتين أكبر في اعتقادك؟ الكثير يقولون «سـرعـة الهـروب بالطبـع» . هذا الاعتقـاد في الغالب ليس له أساس . هل لديك دليل على تخمينــك هذا؟ على كل حال ، لقــد اتخـذت قراراً ويجب الإجـابـة على السؤ ال . حيث إن السرعة المدارية أسهل ، سنبدأ بها .



شكل (٣-٣٢)

(٣ - ٤ - ١) سرعة الدوران

لنفرض أن قمرا يدور حول الأرض ويكاد يلمس أعالي البيوت. افتراض غير واقعي، وخطر على أعالي الأشجار. مع أننا لا نحس بمقاومة الهواء عندما نمشي، إلا أن المقاومة عظيمة عندما تكون السرعة كبيرة وتعقد المسألة بشكل رهيب. لذا فإن التبسيط هنا أمر ضروري؛ نفرض عدم وجود الهواء. نفرض أن المدار دائرة بدلا من شكل بيضاوي وأن السرعة منتظمة فعلا. الفكرة الأساسية، طبعا، هي أن جاذبية الأرض تعطي القمر تسارعاً مركزيًّا. من هودوغراف هاملتون نعرف أن

$$a = \frac{v^2}{r} .$$

ما هي r في مسألتنا الحالية؟ حيث إن قمرنا عند أعالي البيوت، إذن r هي نصف قطر الأرض. ما هي a؟ إنها تسارع جاذبية الأرض. لكن شدة جاذبية الأرض تعتمد على بعد القمر عن الأرض. بدقة أكثر، a هي التسارع عند سطح الأرض. لكي نؤكد على أن التسارع عند سطح الأرض نرمز له بالرمز g_E بدلا من g. إذن نكتب

$$g_E = \frac{v^2}{r} ,$$

ومنه

$$v = \sqrt{g_E \cdot r} . \qquad (٢١)$$

وهكذا حسبنا سرعة الدوران عند سطح الأرض.

لنكون أكثر واقعية، نفرض قمراً في مدار دائري على ارتفاع ٣٠٠ كم فوق سطح الأرض. عند هذا الارتفاع، يكون القمر فوق الغلاف الجوي، ويكون الاحتكاك إن وجد، ضئيلا. وتكون سرعة الدوران عند هذا الارتفاع v_{300} تساوي

$$v_{300} = \sqrt{g_{300} \cdot r_{300}}$$

حيث g_{300} تسارع الأرض عند ٣٠٠ كم فوق الأرض و r_{300} نصف قطر المدار (أي ٣٠٠ كم بالإضافة إلى نصف قطر الأرض). مسألة إيجاد v_{300} تصبح مسألة إيجاد g_{300} .

يمكن تفادي المسألة الأخيرة باستعمال قانون كبلر الثالث، وهذا بحد ذاته يؤكد الدور الهام لهذا القانون في ديناميكا نيوتن. لتكن T الدورة عند سطح الأرض و T_{300} الدورة على ارتفاع ٣٠٠ كم. بما أن الحركتين دائريتان منتظمتان فإن:

$$T_{300} = \frac{2\pi r_{300}}{v_{300}}, \quad T = \frac{2\pi r}{v}$$

حيث $r_{300} = r + 300$ و r محسوبة بالكيلومترات. إذن

$$\frac{T}{T_{300}} = \frac{2\pi r}{v} \cdot \frac{v_{300}}{2\pi r_{300}}$$

أي أن

$$\frac{T}{T_{300}} = \frac{v_{300}}{v} \cdot \frac{r}{r_{300}}$$

هنا نستخدم قانون كبلر الثالث

$$\frac{T}{T_{300}} = \frac{r^{3/2}}{r_{300}^{3/2}}$$

من هاتين المعادلتين الأخيرتين

$$\frac{v_{300}}{v} \cdot \frac{r}{r_{300}} = \frac{r^{3/2}}{r_{300}^{3/2}},$$

إذن

$$v_{300} = \sqrt{\frac{r}{r_{300}}} \cdot v, \qquad (٢٢)$$

ومن الأولى

$$T_{300} = \left(\frac{r_{300}}{r} \right)^{3/2} \cdot T. \qquad (٢٣)$$

سنترك كتمارين حساب سرعة الدوران ودورة مركبات الفضاء في المدارات التالية ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ وk كيلومترات فوق سطح الأرض. طبعاً القارىء سيحرص على حساب متوسط سرعة الدوران والدورة التقريبية لأي مدار ويقارن حساباته بما يذاع في الراديو والتليفزيون ويكتب في الجرائد.

(٣ - ٤ - ٢) سرعة الهروب

كما أشرنا في السابق، حساب سرعة الهروب أكثر صعوبة. وذلك لأن جذب الأرض على صاروخ متجه للفضاء الخارجي غير ثابت ولكن يتغير مع بعد الصاروخ عن الأرض. الجواب يعتمد على التباطؤ الآني عند كل نقطة من مساره من سطح الأرض إلى الفضاء الخارجي. عند حساب سرعة الدوران v_{300} ، استطعنا أن نتحاشى حساب g_{300} ؛ في حساب سرعة الهروب لا نستطيع تفادي الضرورة لمعرفة قيم g المختلفة. نعم، المسألة أكثر صعوبة.

ما هي جاذبية الأرض عند المسافة x كم من مركز الأرض؟ حسب قانون نيوتن للجاذبية، جذب الأرض يعطي الصاروخ تباطؤا يتناسب عكسياً مع مربع المسافة، أي يتناسب مع

$1/x^2$. حتى الآن ونحن مهتمون بآثار الجاذبية، تسارع أو تباطؤ؛ أما اهتمامنا بالسبب وهو قوة الجاذبية فهو غير مباشر. في المسألة التالية، يفضل التعامل مع الجاذبية في صورة القوة وليس في صورة التغير في السرعة الذي تسببه. على هذا الأساس نقدم هذه المقدمة الضرورية.

(٣ - ٤ - ٣) قوة الجاذبية

لنفرض أنك تتسلق جبال القمر. حقيبة ظهرك تحتوي على شرابات إضافية وقارورة دواء. على القمر شراباتك لها نفس المقاس والدواء لا يزال يملأ القارورة، إلا أنهما يزنان أقل؛ جاذبية القمر تساوي سدس جاذبية الأرض. مع أن الكتلة تبقى ثابتة، إلا أن القوة المؤثرة ليست ثابتة. وزن الكتلة أو المادة هو قياس القوة المؤثرة عليها. إذا كانت القوة على قارورة الدواء وهي على الأرض تساوي رطلا فإنها تزن ١/٦ رطل على القمر؛ في كل من المكانين، قارورتا دواء تزنان ضعفي قارورة واحدة. مع أن قوة الجاذبية المؤثرة على جسمين متساويين تساوي ضعفي القوة المؤثرة على أحدهما، إلا أن التسارعات متساوية. القوة $2m \cdot g_E$ المؤثرة على الكتلة $2m$ تعطيها التسارع g_E مثل القوة $m \cdot g_E$ المؤثرة على m؛ والقوة $2m \cdot g_M$ المؤثرة على الكتلة $2m$ تعطيها التسارع g_M مثل القوة $m \cdot g_M$ المؤثرة على m . هذه الأفكار عن القوة، الكتلة والتسارع تتجسد في قانون نيوتن:

القوة = الكتلة × التسارع (٢٤)

نتذكر أن قوانين كبلر تنطبق على أقمار المشتري مثل ما تنطبق على كواكب المجموعة الشمسية، وكنتيجة لقانونه الثالث فإن التسارع المركزي لكل قمر من أقمار المشتري يتناسب عكسيًّا مع مربع مسافته عن المشتري. إن أقمار كل نظام لها تسارع مركزي بحيث يكون

التسارع المركزي يتناسب مع $\frac{١}{\text{مربع المسافة}}$

أو

$$\text{التسارع المركزي} = \frac{c}{\text{مربع المسافة}} \qquad (٢٥)$$

يجب ملاحظة أنه بالرغم من أن ثابت التناسب هو نفسه لجميع الأقمار في نفس النظام إلا أنه يتغير من نظام لآخر. كيف توصل نيوتن إلى قانون عام حيث ثابت التناسب فيه يبقى ثابتاً لجميع الأنظمة؟.

القوانين (٢٤) و(٢٥) تمكننا من النظر إلى الجاذبية من زاوية القوة التي تؤثر بها بدلا من التسارع الذي تسببه. بتجميع هذه المعادلات، نجد أن جاذبية كوكب لقمره تتناسب طرديًّا مع كتلة القمر وعكسيا مع مربع بعد القمر. لتكن F_m القوة المؤثرة على القمر الذي كتلته m وتسبب له تسارع g على بعد r من الجسم الجاذب. من (٢٤)

$$F_m = m \cdot g,$$

ومن (٢٥)

$$g = \frac{c}{r^2}$$

إذن

$$F_m = c \cdot \frac{m}{r^2}.$$

لاحظ جيداً أن قوة الجذب دالة في كتلة الجسم المجذوب وبعده.

الأرض تجذب القمر، والشمس تجذب الأرض. إنه أمر طبيعي ولكن يحتاج إلى الكثير من الجرأة أن نخمن أن كل جسيم يجذب كل جسيم آخر، أي أن الجاذبية ظاهرة عامة. لكن

إذا كان الجسيم A يجذب الجسيم B وكل جسيم يجذب كل جسيم آخر، إذن B يجذب A أيضا. إذا كان كل جسيم يجذب كل جسيم آخر فإن كل جسيم ينجذب إلى أي جسيم آخر.

لنأخذ أبسط حالة حيث لدينا فقط جسيمان m و m' والمسافة بينهما r. انظر الشكل (٣-٣٣). إذا اعتبرنا m قمراً في مجال جاذبية m' فإن القوة المؤثرة عليه تتناسب طردياً مع كتلته m وعكسيًّا مع مربع بعده عن m' أي

$$F_m = c' \frac{m}{r^2}, \qquad (٢٦)$$

حيث c' ثابت التناسب لمجال جاذبية m'.

شكل (٣-٣٣)

حسب نظرية نيوتن، الثابت c' يعتمد على m'. ما هي طبيعة هذه العلاقة؟ للإجابة على ذلك، نعتبر m' قمراً في مجال جاذبية m. القوة $F_{m'}$ المؤثرة على m' من قبل m تساوي

$$F_{m'} = c \frac{m'}{r^2}, \qquad (٢٦')$$

حيث الثابت c مرتبط بمجال جاذبية m ويعتمد على m فقط. بسبب تماثل الوضع، نستنتج أن علاقة c بـm هي نفسها علاقة c' بـ m'.

قانون نيوتن حول الفعل ورد الفعل يؤكد أن قوتي جذب جسمين يؤثر كل منهما على الآخر متساويتان في المقدار ومتعاكستان في الاتجاه:

$$F_m = F_{m'}$$

إذن من (٢٦) و(٢٦`)

$$\frac{c'm}{r^2} = \frac{cm'}{r^2}$$

إذن

$$\frac{c}{m} = \frac{c'}{m'}$$

بما أن c تعتمـد على m فقـط، و c' على m' فقـط، إذن الطـرف الأيسـر مستقل عن m' ، والطرف الأيمن مستقل عن m . نسمى القيمة المشتركة لهذه النسب G:

$$\frac{c}{m} = \frac{c'}{m'} = G$$

وحيث m و m' ، كتلتـان اختيـاريتـان إذن G مستقلة عن كل منهـما. عنـدمـا نعوض $c= mG$ و $c' = m'G$ في (٢٦) و(٢٦`) نجد

$$F_m = \frac{m'mG}{r^2} \qquad (٢٧)$$

و

$$F_{m'} = \frac{mm'G}{r^2} \qquad (٢٧`)$$

كل من هاتـين القـوتـين متناسب طرديًّا مع m و m' وعكسيًّا مع r^2 وبنفس ثابت التناسب G لمجالات أي جسمين m و m'. حيث إن هذا القانون عام، نسمى G ثابت الجاذبية العام.

لقـد توصـل نيـوتن إلى قانون الجاذبية (٢٧) بصورة مشابهة لما ذكرناه حول قانونه القائل بأن تسارع الجاذبية يتناسب عكسياً مع مربع المسافة.

في الحقيقـة، لقـد اعتبر نيوتن قانونه صحيحاً للنقط المادية فقط، أي للأجسام الصغيرة التي يمكن إهمال أبعادها. وكنتيجة لهذا القانون، استطاع بصعوبة بالغة أن يثبت أن محصلة

جذب جسم كروي متجانس لجسيم خارجه تساوي المحصلة لو كانت كتلة الكرة جميعها مركزة في مركزها. إذن عندما نعالج جاذبية الأرض عند بُعد معين من سطحها، علينا أن نأخذ r المسافة من المركز وليس من السطح.

(٣ - ٤ - ٤) قانون كبلر الثالث نتيجة لقانون الجاذبية

نتذكر أن الخطوة الأساسية في صياغة قانون الجاذبية العام هي أن قانون التربيع العكسي للجاذبية نتيجة لقانون كبلر الذي ينص على أن مربع دورة كوكب، T تتناسب مع مكعب نصف قطر مداره r . الآن نثبت العكس، أن قانون كبلر الثالث نتيجة لقانون نيوتن.

نفرض أن كوكباً يدور حول الشمس في حركة دائرية منتظمة. لتكن M وm كتلتي الشمس والكوكب، r المسافة بينهما وF جذب الأول للآخر. من قانون الجاذبية (٢٧) نجد أن

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

وبما أن الحركة دائرية منتظمة، إذن التسارع المركزي يساوي

$$a = \frac{v^2}{r}$$

ومن (٢٤)، نجد أن القوة المركزية F تساوي

$$F = ma. \qquad (٢٨)$$

بقي علينا أن نُدْخل T . من تعريف السرعة المنتظمة

$$v = \frac{2\pi r}{T}. \qquad (٢٩)$$

علينا أن نجد العلاقة بين T وr.

أولاً نحذف a . من (١١) و(٢٨).

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

بالتعويض في (٢٧) وحذف F نجد

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2},$$

إذن

$$v^2 = \frac{GM}{r},$$

نربع (٢٩) ونعوض عن v^2 ونجد

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r},$$

إذن

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 \qquad (٣٠)$$

لكن $4\pi^2/GM$ مستقلة عن T وr ، إذن

T^2 تتناسب مع r^3

وهذا هو المطلوب.

القارىء النبيه سيلاحظ أن هذا الاستنتاج شبيه باستنتاجنا في (٣-٣-٤) والذي حددنا فيه دورة الذبذبة للبندول المخروطي حيث إنه يناسب المسائل الكلامية المفصلة: ما هو المعطى؟ ما المطلوب؟ ما عدد المعادلات؟

(٣ ـ ٤ ـ ٥) الكتلة الكوكبية

من (٣٠)، نحل لـGM ونجد

$$GM = 4\pi^2 \cdot \frac{r^3}{T^2}. \qquad (٣١)$$

حاصل ضرب G وكتلة الشمس M ، دالة في نصف قطر المدار r ودورة القمر T ، ولكنه مستقل عن كتلة القمر. والقانون بالطبع صحيح لأي شمس أخرى وأي قمر لهذه الشمس. المشتري له أقمار، إذن نطبق القانون على المشتري وأحد أقماره. إذا كانت m كتلة المشتري و r' و T' هما نصف قطر مدار أحد أقمار المشتري ودورته على الترتيب فإن:

$$Gm = 4\pi^2 \cdot \frac{r'^3}{T'^2},$$

ومنه نجد

$$\frac{GM}{Gm} = \frac{4\pi^2 r^3/T^2}{4\pi^2 r'^3/T'^2}$$

أي أن

$$\frac{M}{m} = \frac{(r/r')^3}{(T/T')^2}.$$

إذن يمكن حساب نسبة كتلة الشمس إلى كتلة المشتري. بالمثل، حيث إن للأرض قمر، يمكن حساب نسبة كتلة الشمس إلى كتلة الأرض ومنه الكتل النسبية للشمس، المشتري والأرض.

لإيجاد M ، الكتلة الفعلية للشمس، المعادلة (٣١) لا تكفي ؛ نحتاج إلى قيمة G أيضاً. عندما نجعل $M=1$ ، $m=1$ ، $r=1$ في المعادلة (٢٧) فإن

$$F = G$$

إذن G تساوي قوة جذب وحدة الكتلة على وحدة الكتلة على بعد وحدة المسافة. إذن من حيث المبدأ يمكن حساب G عن طريق قياس قوة الجذب بين قطعتي طباشير. لكن الجذب صغير جدًّا لدرجة أن تحديده يصبح غير عملي. لقد حسب G بدقة كل من الفيزيائي الانجليزي كافندش *(Cavendish)* والألماني فون جولي *(Von Jolly)* وآخرون. كما يجب

الإشارة إلى طريقة تعتمد على الميزان الالتوائي (*Torsion balance*) والمصممة من قبل الفيزيائي المجري يوتفوش (*Eötvös*) ـ محاضر بارع وأستاذي في جامعة بودابست.

في الحقيقة (٣٠) ليست صحيحة بالضبط. إنها تعتمد على قانون التسارع المركزي للحركة الدائرية المنتظمة وهذا يفترض أن مركز الجذب ثابت. لكن الشمس غير مسمَّرة في نقطة في الفضاء؛ إنها تتحرك. عندما تقفز في الهواء فإنك تركل الأرض وتحركها. حقًّا إنها تتحرك بمقدار ضئيل للغاية. إذا أخذنا حركة الشمس في الاعتبار والتي تتناول السرعة النسبية، فإننا نبدل (٣٠) بالمعادلة

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \cdot r^3.$$

إذن العلاقة بين T وr تعتمد على كتلة القمر بالإضافة إلى كتلة الشمس M. ولكي نؤكد أننا لم نستنفذ موضوع الكتلة الكوكبية، دعوني أختتم بملاحظة أنه من الممكن حساب كتلة كل من عطارد والزهرة مع أنه لا يوجد لهما أقمار. يكفي معرفة دورتيهما بدقة كافية.

(٣ ـ ٤ ـ ٦) سرعة الهروب

نصل الآن إلى عنوان الجزء الرابع: تحديد السرعة الابتدائية التي يجب إطلاق صاروخ بها من سطح الأرض لينطلق إلى الفضاء الخارجي بدون رجعة. سنهمل مقاومة الهواء كالمعتاد. نفترض أن الأرض والصاروخ هما الجسمان الوحيدان في الفضاء، بحيث لا تؤثر على الصاروخ إلا جاذبية الأرض فقط. حتى بعد هذه التبسيطات، الجواب غير واضح أبدا.

ماذا يحدث؟ بعد انطلاق الصاروخ، تبدأ سرعته الابتدائية في التناقص بسبب جاذبية الأرض. كلما ابتعد الصاروخ عن الأرض قل جذب الأرض له وتناقص معدل تناقص سرعة الصاروخ. لكن سرعته تتناقص باستمرار وإذا توقف أخيراً في الفضاء فإنه يتوقف لحظيًّا؛

حيث إن جذب الأرض وإن كان ضعيفاً سيجذب الصاروخ إلى الأرض مرة أخرى. كلما اقترب الصاروخ من الأرض، زاد جذب الأرض له وأخيراً يصل إلى الأرض بنفس السرعة التي انطلق بها. لب الموضوع هو تحديد السرعة الابتدائية الكافية للتغلب على جاذبية الأرض المتناقصة باستمرار.

كيف نتمكن من حساب هذا التأثير المتغير باستمرار؟ لنعود بأذهاننا إلى الجزء المتعلق بجاليليو، لقد تعامل مع «المتغير باستمرار» عن طريق «غير المتغير». لقد شوَّه المتغير باستمرار إلى فترات مستقرة تعقبها قفزات آنية، ثم صغَّر هذه الفترات ومقدار القفزات حتى تقترب من التغير المستمر. تذكر معالجة جاليليو لسرعة الجسم الساقط والمتغيرة باستمرار. مثل نيوتن، سننظر إلى الجاذبية المتناقصة باستمرار على أنها حالة نهائية لفترات من الجذب الثابت تتخللها تناقصات مفاجئة في الجذب.

كيف نحسب تأثير فترة من الجذب الثابت على سرعة صاروخنا؟ ما هي الفكرة الرئيسية هنا؟ نجد الإجابة في البند (٣-١-٥) حول حفظ الطاقة. هناك نجد (٧)

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg \cdot H.$$

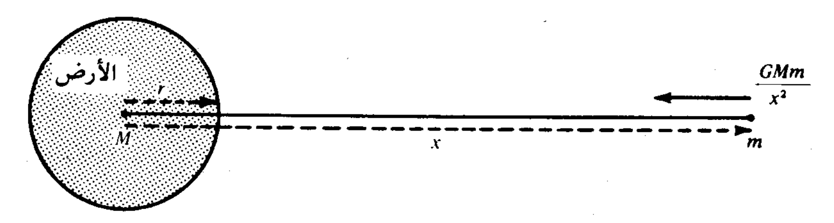
تذكر أن $\frac{1}{2}mv^2$ هي الطاقة الحركية لكتلة تتحرك بسرعة v ؛ mg هي قوة الجاذبية على الكتلة m عند سطح الأرض؛ H هي الارتفاع الذي تسقط عبره الكتلة. عندما تسقط الكتلة m مسافة H فإن نقص الطاقة الكامنة $mg.H$ يتحول إلى طاقة حركية $\frac{1}{2}mv^2$. بصورة أخرى، الجاذبية تؤثر على m بقوة mg على مسافة H في اتجاه القوة، أي أن $mg.H$ هو شغل الجاذبية. وحيث إن الجسم الساقط يسقط من السكون فإن سرعته البدائية وكذلك طاقته الحركية البدائية تساوي صفراً. إذن (٧) تصبح

الزيادة في الطاقة الحركية = الشغل المبذول في اتجاه القوة

إذا أخــذنــا سلسلة الأحــداث في الـترتيب المعــاكس بحيث إن الكتلة تُرمى إلى أعلى بسرعة ابتدائية v والشغل يعمل في اتجاه معاكس، فإن (٧) تصبح

النقص في الطاقة الحركية = الشغل المبذول ضد الجاذبية

أليس هذا ما تحتاجه مسألتنا لكل من فترات الجاذبية الثابتة؟ نضيف أن نيوتن كان يعرف مفاهيم الطاقة الحركية والشغل ولكن لم يكن يعرف المصطلحات هذه بالطبع. على العكس من ذلك، الكثير من طلاب المدارس يعرفون المصطلحات وليس المفاهيم.



شكل (٣-٣٤)

لتكن M كتلة الأرض، r نصف قطرهـا وm كتلة صاروخنـا. انظـر الشكـل (٣-٣٤). نتذكر أن جاذبية كرة منتظمة تؤثر كما لو كانت الكتلة مركزة في مركز الكرة ولذا فالشد F على صاروخ يبعد مسافة x من مركز الأرض حسب قانون نيوتن (٢٧) هو

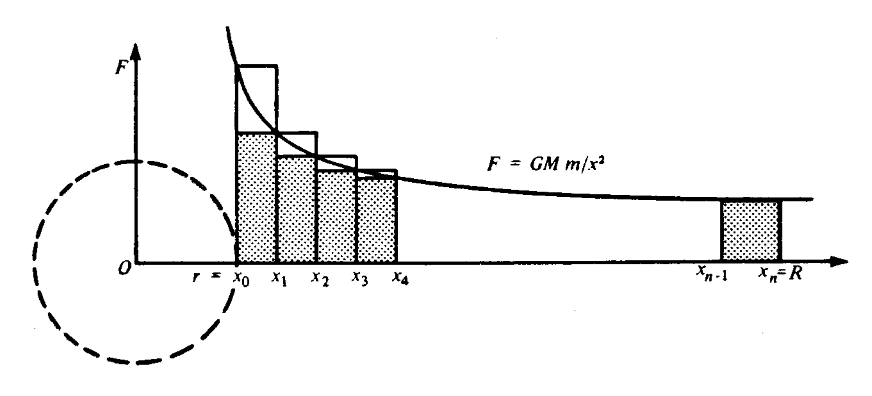
$$F = \frac{GMm}{x^2}$$

حيث إننـا سنحتـاج إلى دراسـة سلسلة من الأوضاع لصاروخنا (مثل ما فعل جاليليو بالجسم الساقط)، لذا نرمز لبعد موقع الكرة النوني بالرمز x_n والقوة المؤثرة على الصاروخ عند تلك النقطة نرمز لها بـ F_n

$$F_n = \frac{GMm}{x_n^2} . \quad (٣٣)$$

كذلك نرمز للشغل المبذول ضد الجاذبية من قبل الصاروخ عندما يتحرك من x_{n-1} إلى x_n بالرمز $W_{n-1,n}$.

حيث إن المكـان الأصـلي للصـاروخ عنـد الانطلاق هوسطح الأرض، سنجعل $x_0 = r$ ونفرض أنه يصل المسافة R من مركز الأرض في المكان $x_n = R$. (نجعله ينطلق أولاً إلى R وبعـد ذلـك إلى الـلانهاية) . مسألتنا هي حساب شغل الصاروخ ضد الجاذبية عندما يتحرك من $x = r$ إلى $x = R$. نرسم الرسم البياني لمعادلة القوة $F = \frac{GMm}{x^2}$ وذلك بإيجاد النقاط التي إحـداثيـاتهـا السينية x_0 ، x_1 ، . . . . ، x_n ونكمل المستطيلات الداخلية والخارجية بالنسبة لهذه النقاط كما في الشكل (٣-٣٥) .



شكل (٣-٣٥)

ما هو شغل الصاروخ ضد الجاذبية عندما يتحرك من x_0 إلى x_1 ؛ أي ما هو $W_{0,1}$ ؟ المسـافـة من x_0 إلى x_1 هي $(x_1 - x_0)$ والقـوة الابتـدائيـة F_0 . لوبقيت هذه القـوة ثابتـة لأصبح الشغل $F_0(x_1 - x_0)$ ، لكننا نعلم أن القوة الحقيقية تتناقص باستمرار. واضح أن

$$W_{0,1} < F_0(x_1 - x_0)$$

القوة F تتناقص من F_0 إلى F_1 ؛ أقل قوة تبذل هي F_1 وتبذل للحظة فقط. واضح أن

$$F_1(x_1 - x_0) < W_{0,1}$$

نجمع هاتين النتيجتين ونحصل على

$$F_1(x_1 - x_0) < W_{0,1} < F_0(x_1 - x_0)$$

بنفس الطريقة نقدر الكميات $W_{1,2}$ ، $W_{2,3}$ ، . . . . ، $W_{n-1,n}$:

$$F_2(x_2 - x_1) < W_{1,2} < F_1(x_2 - x_1)$$
$$F_3(x_3 - x_2) < W_{2,3} < F_2(x_3 - x_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_n(x_n - x_{n-1}) < W_{n-1,n} < F_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

إذا جمعنا هذه الكميات، على ماذا نحصل؟

ما هو التفسير الهندسي للكمية $F_1(x_1 - x_0)$ ؟ إنها مساحة المستطيل الذي قاعدته $(x_1 - x_0)$ وارتفاعه GMm/x_1^2 ، والمظللة في الشكل (٣ـ٣٥). بالمثل $F_2(x_2 - x_1)$ تمثل مساحة المستطيل الذي قاعدته $(x_2 - x_1)$ وارتفاعه F_2 . باختصار، مجموع عناصر الأطراف اليسرى في المتراجحات يساوي مساحة المستطيلات التي تحت المنحنى. لتكن I_n مساحة هذا السلم الداخلي والذي عدد درجاته n . وما هو التفسير الهندسي للكمية $F_0(x_1 - x_0)$ ؟ إنها مساحة المستطيل الذي قاعدته $(x_1 - x_0)$ وارتفاعه F_0 . بنفس الطريقة، نجد أن مجموع الأطراف اليمنى للمتراجحات يساوي مساحة المستطيلات التي تحتوي المنحنى $F = GMm/x^2$. لتكن O_n مساحة هذا السلم الخارجي بـn من الدرجات. نجمع ونجد أن

$$I_n < W_{0,1} + W_{1,2} + W_{2,3} + \cdots + W_{n-1,n} < O_n,$$

أي

$$I_n < W < O_n, \tag{٣٤}$$

حيث W الشغل الكلي للصاروخ ضد الجاذبية عندما يتحرك من x_0 إلى x_n ؛ أي من $x = r$ إلى $x = R$.

ماذا يحدث عندما يتزايد عدد الأماكن n ؟ تتزايد درجات السلم ويقترب السلم الداخلي من السلم الخارجي. أليس واضحاً أنه عندما تكبر n فإن الفرق بين I_n و O_n يصبح صغيراً

للغاية؟ وكذلك واضح أن

$$I_n <$$ المساحة تحت المنحنى $$< O_n \qquad (٣٥)$$

ماذا نستنتج من (٣٤) و(٣٥)؟ نستنتج أنه عندما تكبر n بصورة كافية فإن W والمساحة تحت المنحنى تقتربان من بعضهما؛ أي أن

الشغل ضد الجاذبية = المساحة تحت المنحنى من r إلى R

إذن مشكلة حساب الشغل W تتحول إلى حساب المساحة تحت المنحنى.

نتأمل مرة أخرى (٣٤) و(٣٥). هاتان المعادلتان من الصيغة

$$W = [\text{area}]_r^R.$$

الطريقة هي أن نحسب X ونضغط.

أولا، نحسب X. المتراجحة (٣٤) تمثل مجموع متراجحات مثل

$$F_1(x_1 - x_0) < W_{0,1} < F_0(x_1 - x_0).$$

في البداية، هل يمكن إيجاد X_1 تحقق

$$F_1(x_1 - x_0) < X_1 < F_0(x_1 - x_0) \quad ؟$$

إذا أمكن هذا وأمكن إيجاد X_2 ، X_3 ، . . . ، X_n ، لن يبقى إلا الجمع والحصول على $X = X_2 + X_1 + \ldots + X_n$.

ما هي ؟ تذكر أننا نتعامل مع المنحنى

من (٣٣)
$$F = \frac{GMm}{x^2}$$

$$F_1 = \frac{GMm}{x_1^2} \quad \text{وكذلك} \quad F_0 = \frac{GMm}{x_0^2}$$

إذن

$$F_1(x_1 - x_0) = \frac{GMm}{x_1^2}(x_1 - x_0) \quad \text{و} \quad F_0(x_1 - x_0) = \frac{GMm}{x_0^2}(x_1 - x_0).$$

ما هي الكمية التي تقع بينهما؟ دعونا نكتب الأطراف اليمنى في هذا المعادلات :

$$GMm\left(\frac{x_1 - x_0}{x_0^2}\right) \quad \text{و} \quad GMm\left(\frac{x_1 - x_0}{x_1^2}\right)$$

نركز الآن على الشبه (أوعلى عدم الشبه)

$$\left[GMm(x_1 - x_0)\right]\frac{1}{x_1^2} \quad \text{و} \quad \left[GMm(x_1 - x_0)\right]\frac{1}{x_0^2}.$$

ما الذي يقع بينهما؟ طبعاً شيء من الصيغة

$$\left[GMm(x_1 - x_0)\right]\frac{1}{Y}.$$

المشكلة الآن إيجاد Y بحيث

$$\frac{1}{x_1^2} < \frac{1}{Y} < \frac{1}{x_0^2}.$$

في هذه المرحلة، المرء يحتاج حظًّا بالإضافة إلى إحساس بالشيء المناسب. أليست الصياغة التالية أفضل؟ أوجد y تحقق

$$\frac{1}{x_1^2} < \frac{1}{y^2} < \frac{1}{x_0^2}.$$

لنفرض أن y هذه موجودة؛ إذاً

$$\frac{1}{y^2} < \frac{1}{x_0^2}, \quad و \quad \frac{1}{x_1^2} < \frac{1}{y^2}$$

إذن

$$x_0^2 < y^2 \quad و \quad y^2 < x_1^2$$

وحيث إن الكميات موجبة،

$$y < x_1 \quad و \quad x_0 < y$$

أي أن

$$x_0 < y < x_1 \tag{٣٦}$$

هذه الخطوات يمكن عكسها، إذا حققت y الشرط الأخير فإنها تحقق جميع الشروط السابقة.

هل يمكن الحصول على y هذه؟ إننا نعلم أن

$$x_0 < x_1$$

وتوفر المربعات يوحي بإدخال x_0^2 و x_1^2 . بضرب هذه المتراجحة في x_0 ثم في x_1 ، نحصل على

$$x_0x_1 < x_1x_1 \quad و \quad x_0x_0 < x_0x_1$$

أي

$$x_0^2 < x_0x_1 < x_1^2,$$

إذن

$$x_0 < \sqrt{x_0x_1} < x_1$$

إذن

$y = \sqrt{x_0 x_1}$ أو $y^2 = x_0 x_1$ تحقق الشرط (٣٦).

باختصار، حيث إن $x_0 < x_1$ و $x_0 x_1$ تحققان

$$\frac{1}{x_1^2} < \frac{1}{x_0 x_1} < \frac{1}{x_0^2},$$

و

$$\frac{GMm(x_1 - x_0)}{x_1^2} < \frac{GMm(x_1 - x_0)}{x_0 x_1} < \frac{GMm(x_1 - x_0)}{x_0^2}$$

أي

$$F_1(x_1 - x_0) < GMm\left(\frac{x_1}{x_0 x_1} - \frac{x_0}{x_0 x_1}\right) < F_0(x_1 - x_0),$$

أي أن

$$F_1(x_1 - x_0) < GMm\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right) < F_0(x_1 - x_0).$$

بالطبع ، يمكن عمل نفس الشيء بالنسبة للفترات التالية . النمط واضح ونحصل على

$$F_1(x_1 - x_0) < GMm\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right) < F_0(x_1 - x_0)$$

$$F_2(x_2 - x_1) < GMm\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) < F_1(x_2 - x_1)$$

$$F_3(x_3 - x_2) < GMm\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\right) < F_2(x_3 - x_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_n(x_n - x_{n-1}) < GMm\left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right) < F_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

بالجمع نحصل على

$$I_n < GMm\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n}\right) < O_n,$$

أي

$$I_n < GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) < O_n. \qquad (٣٧)$$

لاحـظ كيف اختفت جميع الكميات x ما عدا الأولى في الفرق الأول والأخيرة في الفرق الأخير. إننا أكثر حظًا مما كنا نتصور.

المعادلة (٣٧) تعطينا X ؛ لنكمل الطريقة بقي أن نضغط I_n و O_n إلى بعض. إذا كانت n كبيرة بشكل كاف فإن الفرق بين مساحة السلم الداخلي والسلم الخارجي للمنحنى يصبح صغيراً بقدر ما نريد، ومن (٣٧) نجد أن المساحة بين r و R = $GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$

إذن

$$W = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

وبما أن

النقص في الطاقة الحركية = الشغل ضد الجاذبية

إذن

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

أو

$$v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}$$

حيث v السرعة الابتدائية للصاروخ لكي يصل إلى نقطة في الفضاء الخارجي تبعد R عن مركز الأرض قبل أن يبدأ في العودة إلى الأرض. لكي يستطيع الهروب تماما يجب أن نأخذ R لا نهائية الكبر و $\frac{1}{R}$ تصبح صفراً. إذن سرعة الهروب $\bar{v}$ تساوي

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \qquad (٣٨)$$

لقد حللنا مسألتنا. بحل هذه المسألة تغلبنا على طريقة التكامل وليس فكرته الأساسية. لقد استعملنا الطريقة القديمة والتي تعود إلى أرخميدس نفسه. لحساب المساحة المطلوبة، احتجنا إلى الكثير من الحظ، بحساب التكامل تصبح هذه المسائل روتينية وأقل إثارة. آمل أن تستعمل هذه الطريقة لتمهيد طريقك إلى حساب التكامل. ركز على المفاهيم الأساسية: المساحة تحت منحنى، تقريبات متتالية والمتراجحة الحاسمة.

(٣ ـ ٤ ـ ٧) نسبة سرعتي الهروب والدوران

أيهما أكبر، سرعة الهروب أم سرعة الدوران؟ في بداية هذا الجزء طلبنا منك أن تحدد رأيك، الآن نستطيع أن نعرف ما إذا كنت محقًّا.

سرعة الدوران على مستوى أعالي البيوت v تساوي

$$v = \sqrt{g_E \cdot r}$$

و m كتلة الصاروخ و M كتلة الأرض؛ بقانون الجاذبية (٢٧) نجد

$$m \cdot g_E = \frac{GMm}{r^2} ,$$

إذن

$$g_E = \frac{GM}{r^2} .$$

بالتعويض في (٢١) نحصل على

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r^2} \cdot r} = \sqrt{\frac{GM}{r}} .$$

ومن (٣٨)

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{GM}{r}} ,$$

إذن

$$\frac{\bar{v}}{v} = \sqrt{2}$$

أي أن

$$\bar{v} = \sqrt{2} \cdot v.$$

ربما أنه واضح أن سرعة الهروب أكبر من سرعة الدوران ولكنه غير واضح أنها أكبر بمقدار $\sqrt{2}$.

لقد رأينا كيف ربط نيوتن حركة التفاحة الساقطة، القذيفة والقمر بقوانين كبلر ومن هذا اهتدى إلى قانونه بخصوص الجاذبية العامة ونظرية الديناميكا. أليست الأقمار الصناعية (لونيك، سبوتنيك، بويونير . . .) شواهد على عبقريته؟

الفصل الرابع

التفكير الفيزيائي في الرياضيات

ماذا عملنا حتى الآن؟ في البداية ناقشنا القياس وخصوصاً في علم الفلك؛ ثم مواضيع بسيطة ولكن شاملة اخترناها من تاريخ الاستاتيكا، وأخيرا اكتشافات عظيمة من تاريخ الديناميكا والكثير منها يعود إلى النجوم. لقد رأينا بعض الشيء عن الدور الذي تلعبه الرياضيات في تطور العلوم؛ وأن هدف الفيزياء هو تركيز معرفتها في قوانين رياضية وكما قال جاليليو كتاب الطبيعة مكتوب برموز رياضية.

مع أنه لا يمكن إنكار وجهة النظر هذه إلا أنها متحيزة. طبعاً الرياضيات تساعد الفيزياء. ولكن يجب ألا نعتقد أن المساعدة دائما تنزل من الرياضيات إلى الفيزياء؛ إن نهر الفكر ذو مد وجزر. هدفي في هذا الفصل هو أن أشرح كيف تساعد الفيزياء الرياضيات.

لن أعطي التفاصيل هنا، حيث إنها موجودة في كتابي: *Mathematics and Plausible Reasoning*، الجزء الأول - صفحة ١٤٢-١٦٧، ويمكن للقارىء أن يجدها هناك.



الفصل الخامس

المعادلات التفاضلية واستخدامها في العلوم

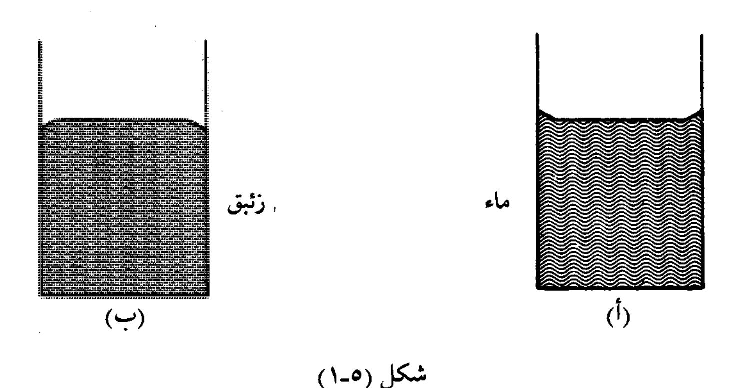
نفترض أن القارىء ملم بمبادىء حساب التفاضل والتكامل، ولكن الإلمام بنظرية المعادلات التفاضلية ليس ضروريًا. سنشرح فيما بعد ماهية هذه المعادلات وكيفية معالجتها وذلك عندما تظهر بصورة طبيعية في مسائل فيزيائية. سنرى حينئذ أن المعادلات التفاضلية مفيدة في العلوم. لا نستطيع أن نفهم كيف ولماذا هي مفيدة قبل أن نستخدمها.

الجزء الأول: أمثلة أولية

(٥ ـ ١ ـ ١) السائل الذي يدور

قطعة أو اثنتان من السكر؟ قليل من الكريم؟ كلنا شاهدنا سيدة تشرب الشاي. ماذا يحدث؟ كلما حركت الشاي بسرعة أكبر، ازداد ارتفاعه على جوانب الكوب. إذا حركته بسرعة فإنها تريق الشاي وتخرب على نفسها هذه المناسبة، كونها يحتوي على مشكلة لها ولنا أيضا. مشكلتنا قابلة للمعالجة الرياضية: ما هو شكل سطح الشاي الذي يدور؟.

لنبدأ بسائل في حالة السكون. كلنا قد رأينا سطح الماء المستوي إذا لم يهز أحد الطاولة، السطح يظهر أنه مستو تماما ولكن بعد التمعن قليلا نجد أنه ليس أفقيا تماما: إنه ينحني إلى أعلى بشكل طفيف عند الأطراف بسبب التوتر السطحي. إذا استبدلنا الماء بالزئبق فإن التوتر

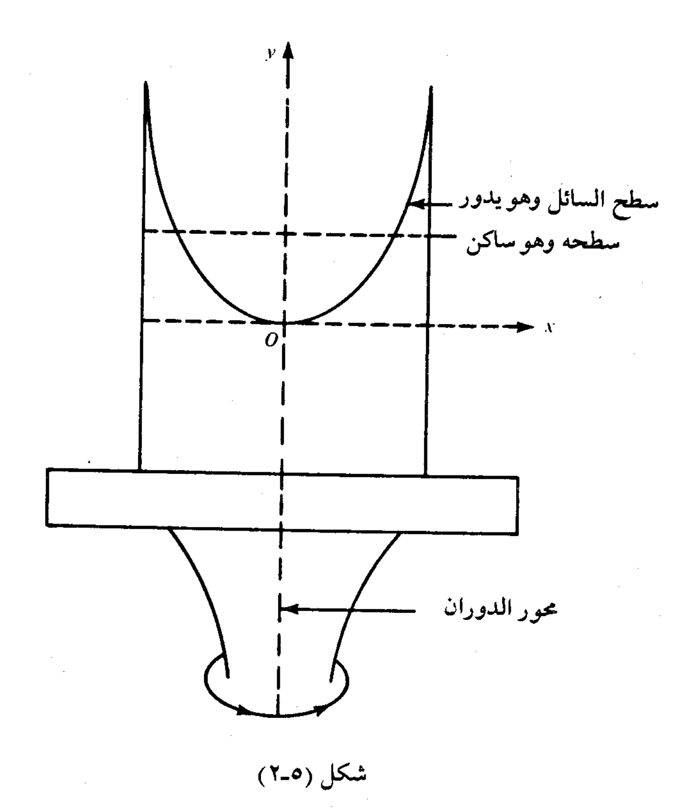


شكل (٥-١)

السطحي يجعل سطح الزئبق ينحني إلى أسفل عند الأطراف. هذه الظاهرة ترى بوضوح في بارومتر الزئبق. انظر الأشكال (٥-١ «أ») و(٥-١ «ب»). النقطة التي ذكرناها مرات كثيرة هي أن الرياضيات أداة فعالة في التعامل مع الحقيقة الملموسة وذلك بكونها مادة مفاهيم. لا نستطيع التعامل مع الحقيقة المباشرة بكامل تعقيداتها، بل يتحتم علينا أن نفترض أوضاعا مثالية. لذا فإننا نهمل ظاهرة التوتر السطحي، ونفترض أن سطح سائل ساكن يقع بكامله في مستو أفقي.

بدلا من الشاي الذي تحركه السيدة، دعونا نلاحظ التجربة التالية. نثبت كأسا مملوءة إلى نصفها بماء ملون على ماكينة الطرد المركزي بحيث تدور بصورة منتظمة حول محور رأسي. في مركز الكأس ينخفض الماء وعند المحيط يرتفع. إذا زاد الدوران، ارتفع الماء بصورة أكبر عند المحيط وانخفض أكثر عند المركز ويتكون تجويف أعمق. انظر الشكل (٥-٢). هذا الشكل يوضح مقطعاً في مستو رأسي يمر في محور الدوران. بالسائل الملون لا توجد أية مشكلة في رؤية سطح السائل؛ المشكلة هي إعطاء وصف رياضي دقيق لشكل السطح الذي يدور.

يوجد وصف تقريبي آخر وهو أن شكل السطح نصف كروي ـ هذه الملاحظ تقودنا إلى مفهوم السطح الدوراني. لو كان نصف كروي، ما هو مقطعه؟ مقطعه نصف دائرة مثل أي



شكل (٥-٢)

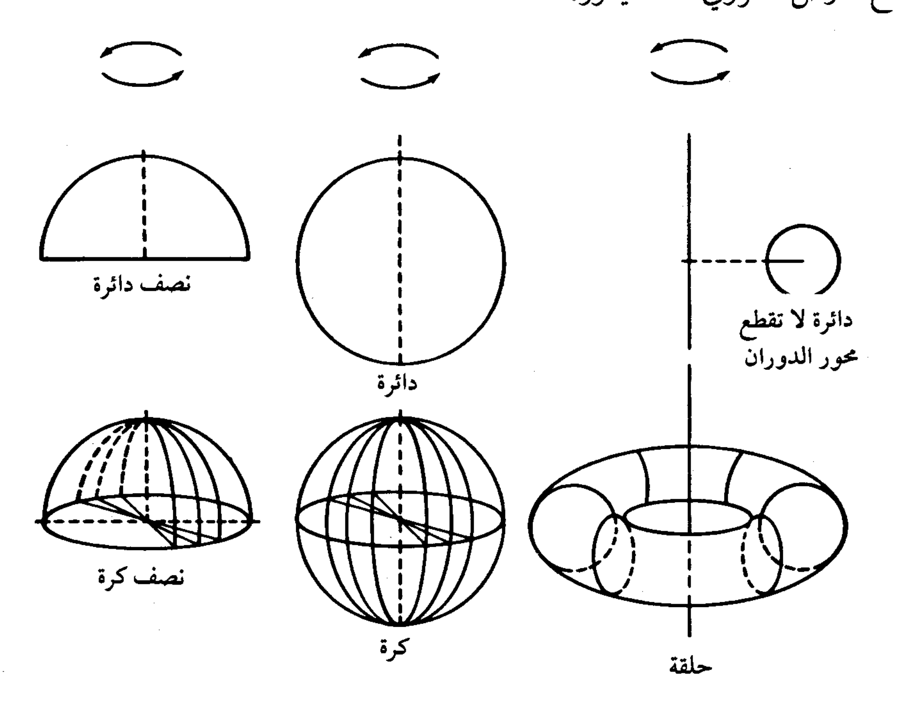
مقطع آخر؛ السطح الناتج عن دوران نصف دائرة حول نصف قطرها المركزي يساوي نصف كرة. بنفس الطريقة، دوران دائرة حول أي قطر لها يولد كرة. الحالة الشيقة هي الشكل الذي ينتـج عن دوران دائـرة حول مستقيم لا يقطعهـا. الشكل الناتج حلقة أو خاتم *(torus)* كما في الشكل (٥-٣).

بما أن نصف الكرة والكرة والحلقة مجسمات تتولد من الدوران فإنها تدعى مجسمات دورانية وسطـوحهـا سطوحا دورانية. لكي نحدد سطحا دورانيا يكفي أن نعرف شكل المنحنى الذي يدور وموقعه بالنسبة إلى محور الدوران.

نعود إلى سطح السائل الذي يدور. عندما تدور أجزاء السطح المختلفة أمام أعيننا فإننا لا نلاحظ أي تغير في الشكل ولا نتوقعه من مبدأ السبب غير الكافي. يمكننا إذن أن نتصور

السطح الدائر على أنه سطح دوراني يتولد عن منحنى لأي مقطع يمر من محور الدوران. المقاطع الأخرى تعطي نفس المجسم. إذن لكي نحدد سطح السائل الذي يدور يكفي أن نحدد الشكل الهندسي لأي مقطع رأسي يمر في محور الدوران.

نسمي المنحنى الذي يولد السطح خط زوال السطح *(Meridian)*. هذا المفهوم مفيد إذا فُهم الفهم الصحيح. فائدته تظهر من أصل الكلمة. الأصلي اللاتيني *meridies* (*medius* وسط + *dies* يوم) وتصبح بالفرنسية *midi* وتعني الظهر. الناس الذين يكون الظهر عندهم في نفس الوقت يعيشون على نفس خط الظهر أو خط الزوال. تكون الشمس في كبد السماء، اثنا عشر بالتوقيت الشمسي، في نفس الوقت في مدينتي سان فرانسيسكو وسياتل. ولكن وقت الظهر يأتي في مدينة نيويورك قبل ثلاث ساعات. أهالي نيويورك يعيشون على خط زوال آخر. خط الزوال هو أية دائرة كبرى تصل القطب الشمالي بالقطب الجنوبي وهذا المنحنى يولِّد سطح الأرض الكروي عندما يدور.



شكل (٥-٣)

النتيجة، هي أن مشكلتنا تصبح إيجاد معادلة خط الزوال. كيف نعمل هذا؟ نبدأ باستعمال نظام إحداثيات متعامدة. أين نضع محاور الإحداثيات؟ طبيعي أن نجعل محور y محور الدوران الرأسي. على هذا الأساس، محور x يصبح أفقيا. وماذا عن المركز o؟ لدينا مجال للاختيار، إذا لاحظنا أن محور الدوران يمر في مركز التجويف فإنه يفضل أن نجعل o عند هذه النقطة المركزية، انظر الشكل (٥-٢). لاحظ أنه مع أننا مخيرون في اختيار مكان محور y وكذلك مخيرون في وضع المركز o على المحور y، إلا أن هناك اختلاف بين هذين الخيارين. البديل الآخر للنقطة o والذي لايعتبر غير طبيعي هو نقطة تقاطع محور الدوران مع السطح الأفقي الأصلي للسائل، ولكن ما هو البديل لمحور y؟ حقًّا، نستطيع أن نجعله حافة الإناء، ولكن هل هذا بديل حقيقي؟ هل يرضينا حقًّا؟ مع أنه ممكن من الناحية المنطقية، إلا أنه ممقوت من الناحية الفيزيائية. القارىء الذي يجد هذه الفكرة بعيدة الاحتمال، يفتقد الإحساس بما هو مهم من الناحية الفيزيائية. سنأخذ المحاور المتعامدة كما في الشكل (٥-٢).

لقد أصبحت مشكلتنا محددة بشكل أكبر: إيجاد معادلة خط الزوال بالنسبة لهذه الإحداثيات. مع أن هذا هو اهتمامنا المباشر، يجب أن لا ننسى هدفنا الأكبر. تذكر أن هذه المحاضرات تأتي تحت العنوان «الطرق الرياضية في العلوم»؛ هدفنا الرئيسي هو أن نتعلم كيف نطبق الرياضيات في الفيزياء.

وراء هذه المسألة الخاصة نريد أن نرى شيئاً أعم وأشمل - وهو موقف العالم الذي يستعمل الرياضيات لفهم العالم من حوله.

لحل مشكلة مثل السائل الذي يدور يوجد ثلاث مراحل. المرحلة الأولى فيزيائية كلها أو معظمها؛ الثالثة رياضية والمرحلة المتوسطة تكون انتقالية من الفيزياء إلى الرياضيات. المرحلة الأولى صياغة الفرضية الفيزيائية أو التخمين؛ الثانية ترجمتها إلى معادلات؛ الثالثة حل المعادلات. كل مرحلة تتطلب عملاً خاصًّا وموقفاً مختلفاً. لكي نوضح هذه الملاحظات، نتابع حل مشكلتنا.

المرحلة الفيزيائية

الكتب المدرسية في الرياضيات تعطي مسائل جاهزة الصياغة. إذا كان الهدف من هذه المسألة تعيين مجهول فإن الكتاب يعرض بوضوح المعطى والشروط التي نحدد بها المجهول.

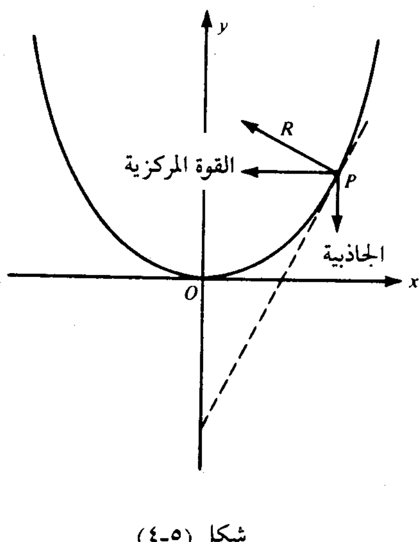
لكن لدينا الآن مشكلة فيزيائية. نريد إيجاد معادلة منحنى الزوال الذي يولد سطح السائل الذي يدور. هدفنا هو هذه المعادلة وهذا واضح. ولكن ما هو المعطى؟ ما هو الشرط؟ إننا نرى السائل الذي يدور ولكن مشاهدة الظاهرة لا تعطينا أي شيء. علينا أن نأخذ ما نحتاج، وخصوصاً علينا أن نستنتج المفاهيم والعلاقات التي نحدد منها المجهول.

أنا لا أفترض أن القارىء يعرف علم الموائع. على العكس، إذا كان يعرفه، عليه أن يتظاهر أنه قد نسيه. إذا واجهنا أي جانب من الحقيقة المرئية فإننا لا نكون في حالة علم كامل ولا جهل كامل، مع أننا في أغلب الحالات أقرب كثيراً إلى الحالة الأخيرة. إذا تعاملنا مع هذه المشكلة ونحن لا نعرف أو نتظاهر بأننا لا نعرف النظرية العامة التي تعالج مثل هذه الحالات فإن فرصتنا أكبر في فهم موقف العالِم عامة وخصوصا عمل المتخصص في الرياضة التطبيقية.

سأفترض أن القارىء ملم إلى حد ما بمبادىء ديناميكا النقطة المادية. إذا عجزت عن المسألة الأصلية، حاول أن تحل مسألة أبسط ومرتبطة بها. لماذا يظهر التجويف في سطح السائل الذي يدور؟ لماذا يكون السطح أفقيًّا عندما يكون السائل ساكنا؟ (سنهمل التوتر السطحي). خذ جزءاً من السائل الساكن، جزءاً صغيرا جدًّا يجاور سطح السائل الأفقي. إنه في حالة سكون لا يتحرك، ومع ذلك فإن وزنه يجذبه إلى أسفل. ما الذي يعادل الوزن؟ يجب أن تكون قوة تؤثر رأسيًّا إلى أعلى وعمودية على سطح السائل الأفقي ولا يمكن أن تكون غير محصلة الضغوط الناتجة عن أجزاء السائل المجاورة. نستنتج أن محصلة الضغط R عمودية على سطح السائل.

الآن نعـود إلى مشكلة السـائل الذي يدور. نأخذ جزءاً صغيراً من السائل بحيث يجاور سطح السائل عند النقطة P. هذا الجزء يدور بانتظام في دائرة أفقية. نحن نعلم من الديناميكا أن هذه الحـركـة الـدائـرية المنتظمة تحدث إذا كانت الكتلة الدائرة تحت تأثير قوة مركزية ثابتة القيمة واتجاهها إلى مركز المسار الدائري. كيف تظهر هذه القوة المركزية؟

من الطبيعي أن نفـترض أن القـوة المـركـزيـة محصلة القـوتـين اللتـين تؤثران على جزء السائل: الجاذبية رأسية إلى أسفل والضغط R عمودي على سطح السائل والناتج عن أجزاء السائل المجاورة. انظر الشكل (٥-٤).



شكل (٥-٤)

لقـد توصلنـا إلى فكـرة فيزيائية أساسية قد تفسر الظاهرة. نعم، ممكن أن تكون تفسيرا ولكن هل هي تفسـير فعـلا؟ السؤ ال له ما يبر ره ولكن دعـونـا نؤ جله الآن، لنصيغ تفسيرنا بصـورة أفضـل وأدق. لقـد أكملنـا الآن المـرحلة الفيـزيائية الأولى من دراستنا وعلينا أن نبدأ المرحلة التالية والتي تعطينا الصياغة الرياضية للفكرة الفيزيائية التي توصلنا إليها.

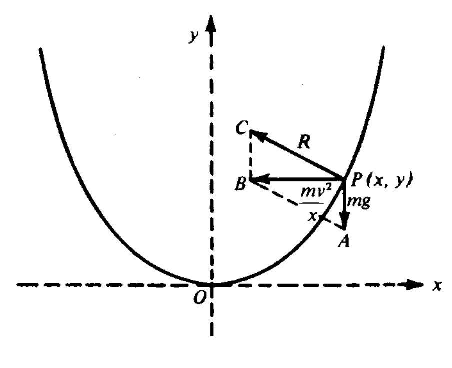
الانتقال من الفيزياء إلى الرياضيات

علينا أن نعيد كتابة ما حصلنا عليه بصورة أدق وأعمق لكي نستطيع التعبير عنه رياضيًّا.

لتكن m الكتلة وv السرعة الدائرية المنتظمة لجزء السائل P عند النقطة (x,y) على خط الزوال. ما هي المسافة بين P ومحور الدوران؟ إنها الإحداثي السيني x. وبما أن الحركة دائرية منتظمة، إذن التسارع المركزي يساوي $\frac{v^2}{x}$. وحيث إن

القـــوة = الــكــتــلة × التســـارع

فإن القـوة المـركـزيـة المؤثـرة على m تسـاوي $\frac{mv^2}{x}$، وقـوة الجاذبية mg حيث g كالمعتاد ترمز لتسـارع الجـاذبيـة. إذن بالإضـافـة إلى معـرفة اتجاهات القوى الثلاث المؤثرة على P كما في الشكـل (٥ـ٤) فإننـا نعـرف قيمـة قوتـين منهـا. زيـادة على ذلك، القوة المركزية هي محصلة القوتين الأخريين. هذه هي النتيجة الأساسية من المرحلة السابقة. لكي نوضح العلاقات بين هذه القوى الثلاث ما علينا إلا أن نكمل متوازي الأضلاع الذي تكون القوة المركزية قطراً فيه وقوة الجاذبية ضلعاً. يكفي ملاحظة أن PC يجب أن يوازي ويساوي AB كما في الشكل (٥ـ٥).

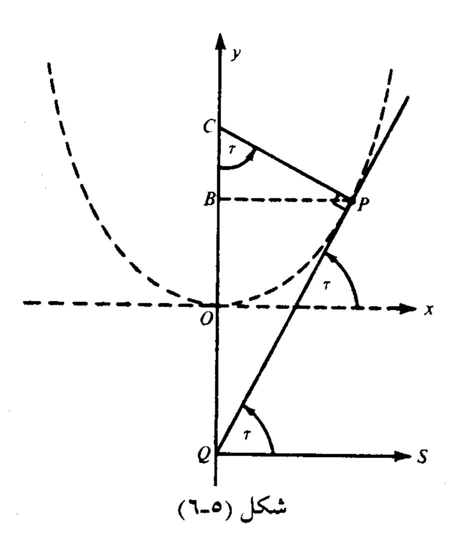


شكل (٥ـ٥)

ماذا بعـد ذلـك؟ فرضيتنـا الفيـزيـائية هي أن شكل خط الزوال يحقق الوضع الموضح في شكـل (٥ـ٥). كيف نحصـل على معـادلـة خط الزوال من هذه الشروط. واضح أنه يتحتم

علينا الاستفادة من هندسة الشكل ونأخذ في الاعتبار إحداثيات النقطة P. ولكن واحدة فقط من الكميتين $\frac{mv^2}{x}$ وmg تحتوي على x وكلتاهما لا تحتويان على y. ربما علينا أن نعزّي أنفسنا بأن نصف رغيف أفضل من لا شيء. على كل حال، علينا أن نستفيد من $\frac{mv^2}{x}$ لكي لا نفوت فرصة الحصول على معادلة تحوي x. ولكن الأمور ليست بهذه السهولة حيث تأتي m مع x. إنه لشيء مخجل لو ظهر أن المنحنى يعتمد على كتلة أجزاء السائل. مخجل لأن الكتلة تعتمد على الحجم وفرضيتنا هي أن أبعاد أجزاء السائل عند P صغيرة جدا ويمكن إهمالها. علينا أن نحتفظ بـ x ونتخلص من m.

كيف نتخلص من m؟ راجع الشكل (٥-٥). خذ المثلث ABP. إن نسبة $\frac{mv^2}{x}$ إلى mg مستقلة عن m. ألا يوحي هذا بأن الظل أو ظل التمام للزاوية A قد يكون مفيداً بالنسبة لنا؟ لقد أهملنا حقيقة هامة اكتشفناها في المرحلة الفيزيائية وهي أن R عمودية على خط الزوال وهذا يعني أن R عمودية على المماس عند P.



شكل (٥-٦)

دعونا نستخدم المماس الموضح في الشكل (٥-٤). بما أننا مخيرون في اختيار أي مقياس رسم لمتوازي أضلاع القوى فإنه يستحسن أن نجعل B (وينتج أن C أيضا) على المحور y. تأمل الشكل (٥-٦). نفرض أن المماس عند P يقطع محور x في زاوية τ ويقابل محور y عند Q

وليكن QS موازياً لـOX. ينتج أن $\angle SQP = \tau$. وبما أن الزاويتين CPQ وCQS قائمتان فإن كل من الزاويتين QCP وPQS تتمم CQP . هذا يعني أن $\angle C = \tau$. إذن

$$\tan \tau = \tan C = \frac{mv^2/x}{mg} = \frac{v^2}{xg}$$

إذن

$$\tan \tau = \frac{v^2}{xg} \qquad (١)$$

هذا نجاح جزئي حيث حصلنا على معادلة في المتغير x.

من الطبيعي أن نحاول الاستعاضة عن $\tan \tau$ بدالة في x وy. هل هذا ممكن؟ إن أول ما نتعلمه في حساب التفاضل هو أن المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ تعطينا ميل المماس للمنحنى $y=f(x)$ عند النقطة (x,y). وحيث إن τ هي الزاوية التي يعملها المماس عند P مع محور x، فإن $\tan \tau$ هو ميل هذا المماس، على هذا الأساس

$$\frac{dy}{dx} = \tan \tau.$$

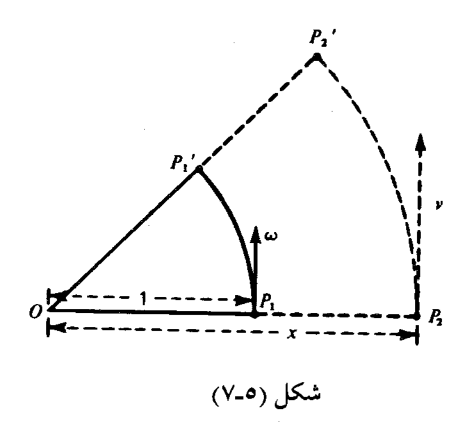
إذن من (١)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v^2}{xg}. \qquad (٢)$$

الطرف الأيسر من هذه المعادلة يحتوي على x وy وإن لم يكن على الطريقة المعتادة كما في الجبر.

هناك جوانب أخرى للمعادلة (٢) تدعو إلى التفكير. لنفرض أننا ننظر إلى السائل الذي يدور من أعلى. ماذا نرى؟ إننا نرى سطح الدوران كمجموعة من الأجزاء التي تدور في دوائر متمركزة حول o (لاحظ أن المحور y من أعلى يظهر كأنه نقطة). كل الأجزاء التي في

نفس المستوي الأفقي تدور بنفس السرعة ولكن كلما ارتفع المستوي ازداد نصف قطر الدوران x وازدادت كذلك السرعة v. بمعنى آخر، v دالة في x. لكن ما هو الشيء الهام هنا؟ إنه كون كل جزئـين على خط الـزوال يدوران مع خط الـزوال. الوضع هنا يشبه طرفي عقربي الساعة اللذين يدوران ليبقيا مع بعضهما البعض. انظر الشكل (٥-٧). أثناء دوران إحدى النقطتين حول O من P_1 إلـى P_1' ؛ تدور الأخـرى حول O من P_2 إلى P_2' . النقطتـان تدوران بنفس السرعة الزاوية.



شكل (٥-٧)

كيف نقيس السرعة الزاوية؟ نقول إن نقطة لها سرعة زاوية ω إذا قطعت قوساً تحده زاوية قياسها ω راديان في دائرة الوحدة في وحدة الزمن. نستعمل الحرف اليوناني ω (أوميغا) حيث إنـه الـرمـز الشـائـع في مثـل هذه الأمور. قد يتبادر للقارىء أنه بما أن دقة الساعة تعتمد على معدل دوران عقاربها وليس على أطوال هذه العقارب إذن أوميغا اسم مناسب لشركة تصنع الساعات.

لنفرض أن $OP_1 = 1$ ، $OP_2 = x$ وأن نقطة تسير على القوس P_1P_1' في وحدة الزمن بسرعة زاوية تساوي ω بينما الأخرى تسير على القوس P_2P_2' بسرعة v. نستنتج أن

$$\widehat{P_1P_1'} = \omega \quad و \quad \widehat{P_2P_2'} = v$$

ولكنـه واضـح بالبـديهـة ـ ومن نظـر لاقليـدس ـ أن أطوال هذه الأقواس تتناسب مع أنصاف أقطارها. إذًا

$$\frac{\omega}{1} = \frac{v}{x}$$

ومنه

$$v = \omega x. \qquad (٣)$$

يبقى أن نلاحظ أنه بما أن عقربي الساعة متزامنان فإن كلا من النقطتين لها نفس السرعة الزاوية، وعليه فإن النقطة التي سرعتها v ونصف قطر دورانها x تدور بسرعة زاوية تساوي ω.

بتربيع (٣) والتعويض في (٢)، نجد أن $\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x^2}{xg}$، أي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}. \qquad (٤)$$

ما هي نتـائـج هذه المعـادلة؟ إذا كانت ω ثابتة (طبعاً g ثابتة) فإن dy/dx تزداد أو تنقص إذا زادت أو نقصت x ؛ ولـذا فإن سطـح السـائـل يكـون أكثـر انبساطاً بالقرب من المحور y لأي سرعة دوران ثابتة. ولاحظ أيضا أن dy/dx تزداد إذا زادت ω وبقيت x ثابتة. إذن المعادلة (٤) تقتضي أن جوانب التجويف تصبح أكثر انحداراً كلما زادت السيدة في تحريكها للشاي. إذا لم تحرك الشاي فإن $\omega = 0$ ويصبح سطح السائل أفقيا. هذه النتائج تطابق حقائق واضحة وهذا يزيد من ثقتنا في المعادلة (٤) وأنها تحدد شكل خط الزوال للسائل. ولكن حسب (٤)، خط الـزوال يعتمـد أيضـاً على g. لو نقصت g إلى سدس قيمتهـا الأرضيـة فإن انحـدار خط الـزوال يزداد ست مرات. مع أننـا حتى الآن لا نشـرب الشـاي على سطح القمر، وأي تغير كبير في g يخرج عن تجاربنا العادية إلا أننا نعلم أن الشاي يراق بسهولة عند تحريكه على سطح القمر. أدلتنا قوية ولكنها ليست قاطعة. إننا نميل إلى قبول صحة المعادلة (٤).

يمكننا أيضاً أن نفحص المعادلة عن طريق تحليل الأبعاد. يفضّل أن ننظر إلى الكميات المختلفـة عن طريق وحـدات قيـاسهـا. نأخـذ السنتيمتر والثانية كوحدات الطول والزمن أما

الكتلة فغير واردة هنا. تذكر أن السرعة الزاوية تقاس بالراديان في وحدة الزمن. وحيث إن قياس الراديان للزاوية المركزية يساوي طول القوس المقابل للزاوية مقسوماً على نصف قطر الدائرة، إذن فهو (مثل الميل) نسبة طولين وبعده صفر.

$$\frac{dy}{dx} = \tan\tau = \frac{\text{cm}}{\text{cm}} = \frac{L}{L} = L^0 = 1,$$

وعليه فإن أبعاد الطرف الأيسر للمعادلة (٤) تساوي صفر.

$$x = \text{cm} = L,$$

$$\omega = \frac{1}{T} = T^{-1}, \qquad \omega^2 = T^{-2},$$

$$g = \frac{\text{cm}}{\sec^2} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2},$$

إذن

$$x\omega^2 \frac{1}{g} = LT^{-2}\frac{1}{LT^{-2}} = 1.$$

إذن الطرفان متطابقان حسب الأبعاد، ولذا نقبل المعادلة (٤) على أنها صحيحة.

أخيراً توصلنا إلى الحقيقة التالية وهي أن خط الزوال الذي يولِّد سطح السائل والذي يدور بسرعة زاوية ω في مجال جاذبية g يحقق العلاقة (٤) لأي نقطة (x,y) على خط الزوال. وهذا ينهي المرحلة الثانية.

نعم، لقد أخذنا وقتاً طويلا في الوصول إلى هذه النتيجة. ولكننا بدأنا من الصفر حيث لم نعط مفهوم خط الزوال ولم يوجهنا أحد إلى أن ننظر إلى السائل على أنه مجموعة من النقط المادية، كذلك لم نعط مفهوم السرعة الزاوية ولا مجال الجاذبية. كان علينا أن نأخذ هذه الأشياء كلها بأنفسنا. المشكلة هي تحديد أي من هذه الأشياء نأخذ. لو عرفنا من البداية هذه الأمور لأصبح عملنا روتينيًا ولَمَا كانت لدينا مشكلة.

المرحلة الرياضية

المرحلة الأخيرة رياضية حيث نستنتج معادلة خط الزوال من

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

الجديد في هذه المعادلة إذا ما قورنت مع المعادلات الجبرية المعروفة هو أنها تحتوي على الكمية $\frac{dy}{dx}$. لهذا فإن الرياضيين يسمونها معادلة تفاضلية . لقد وصلنا إلى الموضوع الرئيسي لهذا الفصل .

حيث إن $\frac{dy}{dx}$ يمثل المشتقة ، فإن القارىء قد يتوقع أن نسمي المعادلة معادلة اشتقاقية . لكن هذا لا يحدث أبداً . التسمية الأولى تدل بجلاء على الصلة بحساب التفاضل . كذلك نسمي المعادلة مثل

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{x^2}$$

معادلة تفاضلية . هذه المعادلة تحوي مشتقة من الدرجة الثانية ، بينما (٤) لا تحوي أية مشتقات أعلى من الدرجة الأولى . في الحقيقة ، درجة أعلى مشتقة في المعادلة لها علاقة هامة بحل المعادلة . لذا فإننا نفرق بين هذه المعادلات : المعادلة (٤) معادلة من الدرجة الأولى بينما المعادلة الأخرى من الدرجة الثانية . المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى تكون من الصورة

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (٥)$$

هذا يوضح أن العناصر هي المتغير المستقل x ، المتغير التابع y والمشتقة الأولى لـ y بالنسبة لـ x. الدالة F تؤكد أن هناك علاقة بين هذه العناصر. لاحظ أنه يمكن كتابة (٤) في الصورة

$$\frac{dy}{dx} - \frac{\omega^2 x}{g} = 0,$$

وهذه حالة بسيطة من (٥) حيث لا يوجد y . مع الأسف لا يوجد أسلوب عام لحل المعادلات التفاضلية من جميع الدرجات ولا حتى طريقة عامة لحل المعادلات من الدرجة الأولى فقط. في العادة نصنف هذه المعادلات الأخيرة حسب الطرق التي تحل بها. المعادلة(٤) تحل بسهولة بطريقة فصل المتغيرات *(Separation of Variables)*. (وهذا يفسر اختياري لمسألة السائل الذي يدور كمقدمة لموضوع المعادلات التفاضلية).

طريقة فصل المتغيرات

المشتقة الأولى تُكتب حسب ليبنتز بالشكل

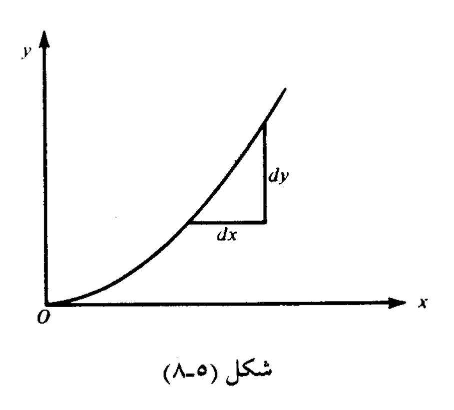
$$\frac{dy}{dx}$$

(هناك رموز أخرى مثل y' ، $\dot{y}$ ، Dy ، D_xy). رمز ليبنتز يستحق بعض الملاحظات حيث إنه مفيد جدا وخطر أيضا. الآن حيث إن مفاهيم النهاية والمشتقة واضحة، لا توجد خطورة في استعمال الرمز $\frac{dy}{dx}$. لكن الأمور تختلف أثناء الفترة بين اكتشاف حساب التفاضل والتكامل من قبل نيوتن وليبنتز وعصر كوشي *(Cauchy)*. في تلك الفترة كانت المشتقة $\frac{dy}{dx}$ تعتبر نسبة كميتين متناهيتي الصغر dy وdx. هذه النظرة كانت مفيدة حيث سهلت تنظيم قواعد حساب التفاضل والتكامل وأعطت معنى حدسيًّا لهذه القوانين. ومع ذلك كانت طريقة غامضة لدرجة أنها أضرت بسمعة الرياضيات؛ بعض مفكري ذلك العصر مثل الفيلسوف بيركلي قالوا إنه لا يمكن فهم حساب التفاضل والتكامل.

يجب أن نوضح لكل مبتدىء أن $\frac{dy}{dx}$ نهاية نسبة وليس نسبة dy إلى dx: الرمز ككل له معنى واضح وجلي أما أجزاؤه dy وdx فلا معنى لها.

بعد أن نفهم هذا، يمكن تحت ظروف معينة أن نعامل $\frac{dy}{dx}$ كما لو كان نسبة: البالغون والمتخصصون يعملون أشياء يجب أن لا يعملها الأطفال أو المبتدئون. مثلا، يمكننا

أن نتذكر التفسير الهندسي لـ $\frac{dy}{dx}$ كميل المماس للمنحنى وذلك باعتبار المثلث القائم المتناهي الصغر بضلعه الأفقي dx وضلعه الرأسي dy. انظر الشكل (٥ـ٨) . هذا ممكن إذا اعتبرنا هذا الأسلوب كاختصار لعملية نهاية نستطيع أن نعملها بدقة إذا احتجنا إلى ذلك.



شكل (٥ـ٨)

إذا تعاملنا مع $\frac{dy}{dx}$ كما لو كان نسبة وضربنا (٤) في dx لنفاضل المتغيرات فإننا نجد

$$dy = \frac{\omega^2}{g} \cdot x dx.$$

الطرف الأيسر لا يحتوي على x ، والأيمن لا يحتوي على y ، يمكننا الآن أن نكامل

$$\int dy = \int \frac{\omega^2}{g} \cdot x dx.$$

وحيث إن المعامل الثابت لا يتأثر بالتكامل فإن

$$\int dy = \frac{\omega^2}{g} \cdot \int x dx.$$

ماذا نشتق لنحصل على x ؟ نشتق $\frac{1}{2}x^2$. بعد إضافة ثابت التكامل غير المحدود نجد

$$y = \frac{\omega^2}{g} \cdot \frac{1}{2} x^2 + C$$

أو

$$y = \frac{\omega^2}{2g} \cdot x^2 + C. \qquad (٦)$$

إذا أعطينا C قيما مختلفة فإننا نحصل على منحنيات مختلفة. أيها يعطينا خط الزوال المطلوب؟ تذكر أننا اخترنا الاحداثيات بحيث يكون المركز O عند أسفل التجويف أي $y=0$ عندما $x=0$. هذا يسمى شرطا ابتدائيا أو حدوديا. وذلك لأن الشرط يحدد مكان بداية خط الزوال أو حدوده.

مع أن المسألة لا تتحدد بالمعادلة التفاضلية فقط إلا أن إيجاد هذه المعادلة يمثل الجزء الرئيسي من الحل. لإيجاد هذه المعادلة، كان علينا أن نفحص وضعاً فيزيائيا معقدا. على العكس من ذلك، الشرط الابتدائي واضح وإلى حد ما اختياري. المعادلة (٦) تدل على أن المستوى الأفقي الذي اخترنا فيه المحور x كان لمجرد تسهيل الرموز. كما ذكرنا سابقا هذا الخيار ليس له أي مدلول فيزيائي وذلك على العكس من اختيار محور الدوران على أنه المحور y.

نطبق الشرط الابتدائي $y=0$ عندما تكون $x=0$ على المعادلة (٦) ونجد أن

$$0 = \frac{\omega^2}{2g} \cdot 0 + C,$$

إذن

$$C = 0$$

وأخيرا

$$y = \frac{\omega^2}{2g} \cdot x^2.$$

إذن خط الزوال قطع مكافىء والسطح مكافىء دوراني وهذا هو حل المسألة.

(٥ ـ ١ ـ ٢) جاليليو: السقوط الحر

مثالنا الآخر على المعادلات التفاضلية يخص مسألة جاليليو حول السقوط الحر.

نأخذ المحور x رأسيا واتجاهه الموجب إلى أسفل ونفرض أن جسماً ثقيلا يسقط من المركز o حيث $x=0$. نعتبر الزمن $t=0$ عندما يبدأ الجسم في السقوط. الحركة تخضع للشرط الابتدائي وهو أن $v=0$ و $x=0$ عندما $t=0$. أين يصبح الجسم بعد t من الثواني؟ الجسم يكون في مكان معين عند أي لحظة وما دام يسقط فإنه يكون في أماكن مختلفة عند أوقات مختلفة. المكان يعتمد على الزمن؛ x دالة في t و $x=f(t)$. المشكلة هي تحديد الدالة $f(t)$. انظر الشكل (٥ـ٩).

$(x = 0, t = 0)$

(x, t)

x

شكل (٥ـ٩)

لقد لاحظ أرسطو وغيره أنه مع ازدياد مسافة السقوط تزداد سرعة الجسم. نذكر أن جاليليو أصر على دراسة أدق للحركة وخمن أن السرعة المكتسبة v تتناسب مع مسافة السقوط x. أي أن

$$v = cx \qquad (٧)$$

حيث c ثابت مستقل عن x. في البند (٣ـ١ـ٣) ذكرنا أن جاليليو أخيرا توصل إلى أن هذا التخمين ليس خاطئا فحسب ولكنه غير معقول من الناحية المنطقية. وحيث إن حساب التفاضل والتكامل غير معروف في زمانه، كان عليه أن يكتشف محاكمة دقيقة وصعبة. الآن نستطيع إعطاء محاكمة تعتمد على التفاضل والتكامل. حيث إن السرعة الآنية v تساوي

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (٨)$$

بالتعويض بـ (٨) في (٧)، نحصل على المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى

$$\frac{dx}{dt} = cx.$$

مرة أخرى نعامل المشتقة وكأنها نسبة. نضرب في dt ونجد

$$dx = cx \cdot dt.$$

نقسم على x ونحصل على

$$\frac{dx}{x} = c \cdot dt.$$

لقد فصلنا المتغيرات الآن. علينا أن نكامل

$$\int \frac{1}{x}\, dx = c \int dt.$$

ماذا نشتق لنحصل على $\frac{1}{x}$ ؟ نشتق الدالة $\log_e x$. إذن

$$\log_e x = ct + k,$$

حيث k ثابت التكامل غير المحدد. لكننا نريد قانوناً لـx وليس للُّوغاريتم. نتذكر من تعريف اللوغاريتم أن

$$\log_{10} 2 = 0.30103, \qquad 2 = 10^{0.30103}$$

متكافئتان. إذن نجد أن

$$x = e^{ct+k}.$$

من الشروط الابتدائية، إذا $t=0$ فإن $x=0$ أي

$$0 = e^{c0+k} = e^k.$$

إذا كانت $k \geqslant 0$ فإن e^k موجبة. وإذا $k < 0$ مثلا وتساوي k' − حيث k' موجبة فإن

$$e^k = e^{-k'} = \frac{1}{e^{k'}}$$

وهـذه كمية موجبـة. باختصـار: إذا كانت سرعة السقوط الحر تتناسب مع الإزاحة فإن الصفر يساوي عددا موجبا. وهذا غير معقول. إذن سرعة السقوط الحر لا يمكن أن تتناسب مع الإزاحة.

مرة أخرى حللنا المشكلة بواسطة معادلة تفاضلية بشرط ابتدائي. على الرغم من بساطة الطـريقـة فهي مهمـة تاريخيـا. إننـا نتوقع أن تدحض التجربة النظريات الفيزيائية الخاطئة. النظرية التي بين أيدينا دُحضت بالمنطق: لقد أثبتنا أنها متناقضة مع نفسها.

جاليليو خمن مرة أخرى أن السرعة المكتسبة تتناسب مع الزمن اللازم لاكتساب السرعة. أي أن

$$v = gt \qquad (٩)$$

حيث g ثابت مستقل عن t.

بتعويض (٨) في (٩) بدلاً من (٧)، نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = gt.$$

نفصل المتغيرات وذلك بالضرب في dt

$$dx = gt \cdot dt.$$

نكامل

$$\int dx = g \int t \cdot dt.$$

نحصل على

$$x = \frac{1}{2} gt^2 + C.$$

وحيث إن $x=0$ عندما $t=0$

$$0 = \frac{1}{2} g \cdot 0 + C,$$

ومنه

$$C = 0$$

إذن

$$x = \frac{1}{2} gt^2.$$

هذه حقيقة فيزيائية هامة. التأمل والمقارنة بين استنتاجها الحالي واستنتاج جاليليو (راجع البند ٣-١-٣) مفيد. إن إيجاد الحلول بدون التفكير في ما نعمله يكسبنا الكثير - ولكن قد يفقدنا الكثير.

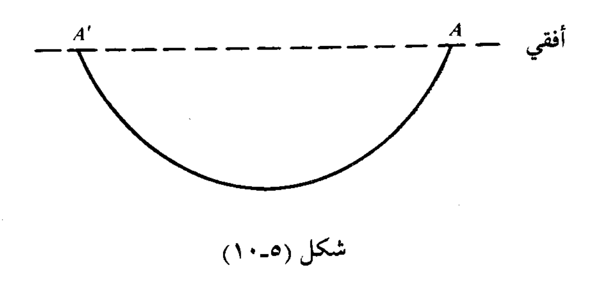
(٥ - ١ - ٣) منحنى السلسلة

منحنى السلسلة (*Catenary*) يأتي من الكلمة اللاتينية (*catena*) وتعني السلسلة ويستعمل للمنحنى الذي تأخذه سلسلة منتظمة معلقة بحرية من نقطتين ليستا على نفس المستقيم الرأسي. نريد أن نعرف شكل منحنى السلسلة هذا أو بمعنى آخر أن نجد معادلته. إذا كانت نقطتا التعليق فوق بعضهما مباشرة فليس لدينا منحنى سلسلة والشكل واضح.

عندما كنت صغيراً كان الرجل يظهر غناه وبدانته بتعليق سلسلة ساعة ذهبية على صدريته. ولكن حتى لو بقيت هذه العادة إلى الآن فإنها ليست سببا كافيا لدراسة منحنى السلسلة. في عصرنا التكنولوجي يوجد الكثير من هذه المنحنيات مثل أسلاك التلغراف وأسلاك الكهرباء. إذا لم يتم زيادة قوة تحمل الصلب حديثا فإن سلكا من الصلب طوله ستة أميال ينقطع تحت تأثير وزنه.

خذ منحنى السلسلة الموضح في الشكل (٥-١٠). طبعا الدعامات عند A وA' تعمل أكثر من مجرد مقاومة وزن السلك. الكثير من المهندسين يقضون معظم أوقات عملهم في حساب الشد في الأسلاك والكبلات وخصوصاً قيمة واتجاه الشد عند نقاط التعليق. كما هو معروف، أسلاك الضغط العالي الكهربائية خطرة ويجب العناية في عمل تمديداتها.

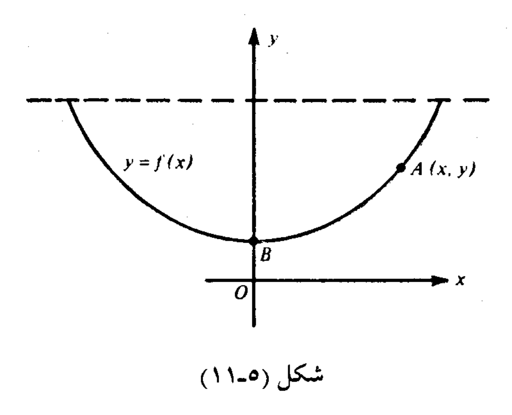
ليس صحيحا أن جميع الأسلاك المعلقة بحرية تأخذ شكل منحنى السلسلة. إن كلمة سلسلة في التعريف السابق تعني القوة والمرونة. يجب أن لا تكون السلسلة صدئة عند حلقاتها. السلسلة المثالية لا تتمدد وتتحرك بحرية عند حلقاتها أي أنها لا تقاوم الثني. أما كلمة منتظمة فإنها تعني أن السلسلة مصنوعة من مادة متجانسة وأن وزنها لوحدة الطول ثابت. كلما اقترب السلك المعلق أو السلسلة من تحقيق هذه الشروط اقترب الشكل من منحني السلسلة.



شكل (٥-١٠)

نأخذ سلسلة مثالية معلقة من نقطتين من نفس المستوى الأفقي. (سندرس فيما بعد حالة النقاط التي ليست من نفس المستوى الأفقي) هل تميل السلسلة إلى جهة دون الأخرى؟ إذا كان الأمر كذلك فإلى أي من نقطتي التعليق يكون أسفل السلسلة أقرب؟ اليمين أو اليسار؟ نعم إننا نعرف مبدأ السبب الكافيء. السلسلة ستكون متناظرة حول المحور الرأسي في منتصف المسافة بين نقطتي التعليق. طبيعي أن نجعل هذا العمود محور y. ماذا عن المحور x؟ يمكن أن نجعله عند أسفل المنحني مثل السائل الذي يدور ولكن هذا ليس ضروريا. سوف آخذ المحور تحت المنحنى بمسافة اختيارية والسبب في هذا سيظهر فيما بعد. نحصل الآن

على الوضع الموضح في الشكل (٥-١١) . مشكلتنا هي إيجاد معادلة منحنى السلسلة $y=f(x)$ بالنسبة إلى محاورنا المتعامدة.



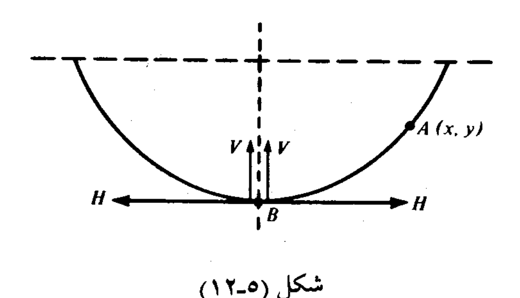
شكل (٥-١١)

المرحلة الفيزيائية الأولى صعبة. الهدف واضح ولكن الأشياء التي يمكن اعتبارها كمعطيات ليست واضحة أبداً. من تعريف منحنى السلسلة نلاحظ أن السلسلة منتظمة. نفسر هذا على أنه يعني أنها مصنوعة من مادة متجانسة ولذا فإن وزن وحدة الحجوم ثابت. ولكن السلسلة المنتظمة تعني أكثر من هذا: السلسلة التي حلقاتها ثقيلة من جهة وخفيفة من جهة أخرى وكذلك السلك السميك عند طرف والنحيف عند الطرف الآخر لا يمكن وصفه بأنه منتظم حتى لو كان مصنوعاً من مادة متجانسة. بالإضافة إلى ذلك يجب أن يكون مقطعه منتظما. بمعنى أن كل جزء من السلسلة له نفس الوزن بالنسبة لوحدة الطول فإذا اعتبرنا السلسلة خطا مستقيما فإن كثافتها الطولية ثابتة. كالمعتاد نسمي هذه الكثافة λ .

هل هذا كاف أم أننا نحتاج إلى معلومات إضافية؟ إذا كانت الكثافة الطولية للسلسلة λ فإنها لا تتغير مهما كان شكل السلسلة. سنفترض أن معرفة الكثافة λ كاف لتحديد شكل السلسلة. يمكن صياغة المشكلة على النحو التالي: لدينا سلسلة مثالية كتلتها الطولية λ معلقة كما في الشكل (٥-١١) وفي حالة اتزان، نريد إيجاد معادلتها بالنسبة للمحاور المتعامدة المختارة.

المرحلة الثانية هي ترجمة شروط التوازن إلى الرياضيات. نتوقع أن نحصل على معادلة تفاضلية بشرط ابتدائي.

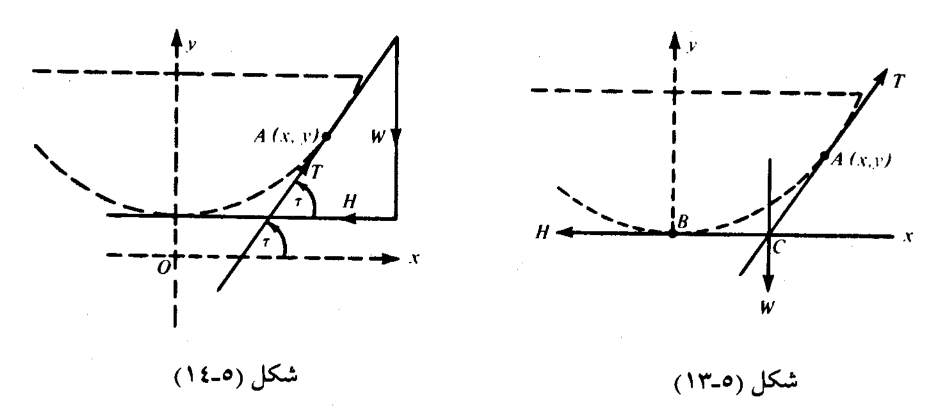
فك قليلا من القطن من لفه واسحب. تلاحظ أن القطن المفكوك مماس للفة. على العكس من ذلك فك سلكا ثقيلا جدا من على اسطوانة واسحب، تلاحظ أن السلك قد لا يماس الاسطوانة. قد لا تستطيع سحبه بسبب مقاومته للثني. السلسلة المثالية كاملة المرونة. نستنتج من هذا أن الشد في السلسلة يكون دائماً مماساً لها.



شكل (٥-١٢)

نعزز هذه النتيجة بدراسة القوى المؤثرة عند B ، أسفل المنحنى. المهم هنا هو أن B في وضع تناظر بالنسبة إلى الجزء الأيسر والأيمن من المنحنى، ولذا فإن الجزئين يؤثران على B بقوى متناظرة. لنجعل H المركبة الأفقية وV المركبة الرأسية للقوة المؤثرة على B بسبب أي من الجزئين. راجع شكل (٥-١٢). بسبب التناظر، المركبتان الأفقيتان H متساويتان ومتعاكستان ولذا فإحداهما تلغي الأخرى. محصلة المركبتين الرأسيتين تساوي $2V$. لنحصل على التوازن يجب أن نعادل القوة $2V$ بوزن الجسيم عند النقطة B. ما هو وزن الجسيم؟ بما أن السلسلة تزن λ لوحدة الطول فإن الوزن يقل كلما قل طول الجسيم. ولكن أليس غريبا أن نتكلم عن طول جسيم؟ القصير جدا يزن قليلا جدا ولذا فإن $2V$ وكذلك V صغيرة جدا. إذا صار الجسيم نقطة مادية مثالية فإن $V=0$ ، وتصبح قوة كل من جزئي السلسلة أفقية. لكن المماس عند B أفقي. إذن الشد عند B في اتجاه المماس. إذا قطعنا السلسلة عند B ففي أي اتجاه نشد لكي يبقى BA في حالة توازن؟ عضلاتك ستعطي نفس الجواب.

اتفقنا الآن على أن الشد في السلسلة يكون مماسا في حالة التوازن. إذن الجزء BA يتزن تحت تأثير القوة الأفقية H عند B والشد T عند A. هل هناك قوى أخرى تؤثر عليه؟ فقط وزنه. كل قطعة صغيرة من السلسلة تتأثر بقوة الجاذبية إلى أسفل وهذه القوة تتناسب مع طول القطعة. إننا لا نأخذ كل قوة من هذه على حدة، محصلة هذه القوى هي وزن السلسلة BA الذي نسميه W ويؤثر في نقطة معينة تسمى مركز الثقل. إذن BA تتزن تحت تأثير ثلاث قوى H ، T وW . إذن القوة W تساوي وتعاكس محصلة القوتين الأخريين وخطوط عمل هذه القوى تتلاقى في نقطة واحدة. لنفرض أنها تلتقي عند C . انظر الشكل (٥-١٣).



شكل (٥-١٤) شكل (٥-١٣)

الآن نستطيع أن نحدد شكل المنحنى على النحو التالي. أينما تكون النقطة $A(x,y)$ فإن معادلة BA تكون بحيث أن الخط الرأسي المار في مركز الثقل يمر من نقطة تقاطع المماس عند A والخط العمودي على المحور y والمار في B. هل يمكن الحصول على معادلة تفاضلية من هذا؟ يبدو أن هذا غير ممكن، لنحاول شيئا آخر.

بدلا من البدء بأن خطوط القوى H ، T وW متلاقية، نبدأ بحقيقة أن هذه القوى الثلاث متوازنة. من هذا نعرف أنه يمكن تمثيل القوى قيمة واتجاهاً بمثلث القوى. انظر الشكل (٥-١٤). كما في السابق، إذا كانت τ هي الزاوية بين المماس ومحور x فإن

$$\tan \tau = \frac{W}{H}.$$

وكذلك نعرف أن

$$\frac{dy}{dx} = \tan \tau$$

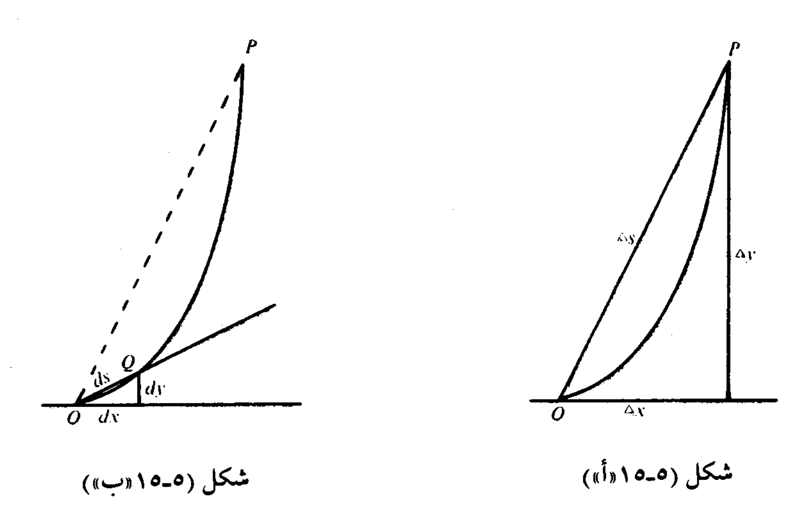
إذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{H}. \quad (١٠)$$

هـــل المعـادلـة (١٠) معـادلـة تفاضلية؟ ماذا نعرف عن H وW ؟ H هي الشد الأفقي عند B ، انظر الشكل (٥ـ١٢)، وعليه فإن H مستقلة عن مكان $A(x,y)$ ؛ أي أن H ثابت. W هو وزن قوس السلسلة بين B و $A(x,y)$: إذا كان s يمثل طول القوس فإن

$$W = \lambda s. \quad (١١)$$

علينـا الآن أن نربـط s بإحـداثيـات A . القانون المطلوب موجود في كتب المدارس ولكن ربـما أنـك قد نسيتـه. على كل حال سوف استنتجـه لك. سوف اتبـع طريقـة «تسعـة إلى واحد». وهذا يعني أنني سأستعمل تسعة أجزاء من الحدس إلى جزء واحد من المنطق.



شكل (٥ـ١٥«أ»)

شكل (٥ـ١٥«ب»)

خذ الشكلين (٥-١٥) (أ) و(ب). عندما تتحرك P على المنحنى إلى O فإن ميل القاطع OP يقترب من ميل المماس OQ (نعتبر Q لا نهائية القرب من O).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = D_x(y).$$

سنتبع نيوتن وليبنتز ونكتب $D_x(y)$ كنسبة وبذلك نخفي الكثير من الخطايا المنطقية - نكتب المشتقة على الصورة $\frac{dy}{dx}$. الرمز

$$\lim_{x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}$$

يساعد ويغري البديهة. الرمز والأشكال تغرينا بأن نقول إنه عندما يصل القاطع وضعه النهائي أي تنطبق P وQ فإن $\triangle x$ تصبح dx و$\triangle y$ تصبح dy وجزء الخط المستقيم $\triangle s$ يصير ds أي القطعة اللانهائية الصغر من المنحنى المتطابقة مع مماسه. لن نقاوم هذه الإغراءات.

بمساعدة فيثاغورس، نجد أن

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

أو

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (١٢)$$

من (١٠) و(١١) نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda}{H} s.$$

نشتق هذه المعادلة وباستعمال (١٢) نجد

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\lambda}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (١٣)$$

هذه المعادلة تحوي $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ ولا يوجد مشتقات أعلى من الدرجة الثانية، إذن المعادلة معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية وهي من الصيغة العامة.

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

مع أننا لم نحدد المحور x إلا أن لدينا الشرط الابتدائي: بغض النظر عن الاحداثي الصادي للنقطة B، المنحنى أفقي عند B. أي أن $\frac{dy}{dx} = 0$ إذا كانت $x=0$. المعادلة (١٣) هي ثمرة جهودنا. هل هي معقولة؟ دعونا نجرب اختبار الأبعاد. في السابق وجدنا أن $\frac{dy}{dx}$ لا بعد له أي أن

$$\frac{dy}{dx} = 1,$$

من هذا نستنتج أن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,(dy/dx)}{dx} = \frac{d\,(1)}{dx} = \frac{1}{L}.$$

بما أن $\frac{dx}{dy}$ لا بعد له (عدد مطلق) فإن $d\,(dy/dx)$ ليس له بعد أيضا. كذلك $(dy/dx)^2$ عدد مطلق وأيضاً العامل $\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$ الواقع على يمين المعادلة (١٣). العامل الآخر هو

$$\frac{\lambda}{H} = \frac{\text{كثافة طولية}}{\text{الشد}} = \frac{\text{قوة}/\text{طول}}{\text{قوة}} = \frac{١}{L}$$

إذن، أبعاد الطرف الأيمن تساوي $\frac{1}{L}$. إذن المعادلة تحقق اختبار الأبعاد. يفضل كتابة

$$\frac{\lambda}{H} = \frac{1}{a},$$

حيث a طول وتصبح المعادلة (١٣)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (١٤)$$

هذا ينهي المرحلة الثانية .

المرحلة الثالثة الرياضية هي حل (١٤) . هذه معادلة خاصة من الدرجة الثانية حيث إنها لا تحوي x ولا y ، فقط المشتقتين الأولى والثانية . في هذه الحالة الخاصة يمكننا تحويل المعادلة إلى الدرجة الأولى . نستطيع أن نجرب هذا التحويل مع جميع المعادلات ولكننا نادرا ما سننجح .

لنجعل $p = \dfrac{dy}{dx}$ ، إذن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(p) = \frac{dp}{dx}$$

وتتحول المعادلة (١٤) إلى معادلة الدرجة الأولى

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + p^2}\ .$$

ماذا نعمل الآن؟ نفصل المتغيرات طبعا .

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{1}{a}\int dx. \qquad (١٥)$$

ماذا نشتق بالنسبة لـp لنحصل على $\dfrac{1}{(1 + p^2)^{1/2}}$ ؟ المفروض أن تعرف الإجابة عن ظهر قلب وهي $\log_e(p + (1 + p^2)^{1/2})$. لكن دعونا نتأكد من هذه الإجابة .

$$\frac{d}{dp}\left\{\log_e\left(p + \sqrt{1 + p^2}\,\right)\right\} = \frac{1}{p + \sqrt{1 + p^2}}\ \frac{d}{dp}\left\{p + (1 + p^2)^{1/2}\right\}$$

$$= \frac{1}{p + \sqrt{1 + p^2}}\left\{1 + \frac{1}{2}(1 + p^2)^{-1/2}\frac{d}{dp}(1 + p^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{p + \sqrt{1 + p^2}}\left\{1 + \frac{1}{2}(1 + p^2)^{-1/2}2p\right\}$$

$$= \frac{1}{p + \sqrt{1 + p^2}} \left\{ 1 + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{p + \sqrt{1 + p^2}} \; \frac{p + \sqrt{1 + p^2}}{\sqrt{1 + p^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \, .$$

إذن تكامل (١٥) يعطي

$$\log_e\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = \frac{x}{a} + C.$$

باستخدام الشرط الابتدائي

$p = \dfrac{dy}{dx} = 0$ عندما $x = 0$

نجد أن

$\log_e 1 = C$ أي أن $C = 0$

ومن هذا

$$\log_e\left(\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right) = \frac{x}{a} \, . \qquad (١٦)$$

نتذكر أن $\log_{10}2 = 0.30103$ يكافىء $2 = 10^{0.30103}$ ، بنفس الطريقة نحول (١٦) ونحصل على

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = e^{x/a}.$$

الخطوة التالية هي التخلص من الجذر

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = e^{x/a} - \frac{dy}{dx}$$

نربع الطرفين

$$1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = e^{2x/a} - 2e^{x/a} \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2,$$

أي

$$2e^{x/a} \frac{dy}{dx} = e^{2x/a} - 1,$$

وأخيرا نصل إلى

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x/a} - 1}{2e^{x/a}} = \frac{1}{2} (e^{x/a} - e^{-x/a}),$$

هذه معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى . إذا حللنا هذه المعادلة فإننا نكون قد حللنا معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية عن طريق حل معادلتين من الدرجة الأولى .

نفصل المتغيرات ونجد

$$\int dy = \frac{1}{2} \int e^{x/a} dx + \frac{1}{2} \int (-e^{-x/a}) dx.$$

بما أن مشتقة $ae^{x/a}$ هي $e^{x/a}$ ومشتقة $ae^{-x/a}$ هي $-e^{-x/a}$

فإن

$$y = \frac{1}{2} ae^{x/a} + \frac{1}{2} ae^{-x/a} + C'.$$

عندما $x=0$ فإن

$$y = \frac{1}{2}a(e^0 + e^{-0}) + C' = \frac{1}{2}a(1+1) + C' = a + C'$$

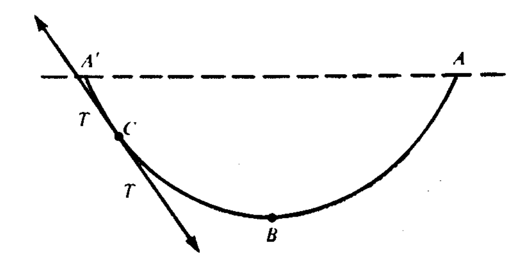
باختيار $C' = 0$ نحصل على أبسط معادلة لمنحني السلسلة وهي

$$y = a \cdot \frac{(e^{x/a} + e^{-x/a})}{2} \tag{١٧}$$

حصلناعلى هذه المعادلة بجعل $y=a$ إذا كانت $x=0$. في شكل (٥-١١)، إذا جعلنا OB يساوي a فإنه يتضح لنا السبب في عدم وضع محور x عند أسفل المنحنى [كما وعدنا عندما قدمنا الشكل (٥-١١)].

بقيت نقطة واحدة: لقد فحصنا شكل سلسلة منتظمة معلقة بحرية من دعامتين A وA' في نفس المستوى الأفقي. ماذا يحدث في الحالة غير المتناظرة حيث A وA' في مستويين مختلفين وB لا تقع على محور التناظر؟ عند قاع السلسلة B يكون الشد أفقيا وكل شيء يبقى كما هو بغض النظر عن عدم التناظر.

هناك طريقة أخرى يمكن استخدامها حتى لوكانت السلسلة قصيرة جدا وبدون قاع B. انظر الشكل (٥-١٦).



شكل (٥-١٦)

لنفرض أننا قطعنا الجزء AC من السلسلة وأبقينا الجزء الباقي $A'C$ عند C وذلك بشده بنفس القـوة التي كان AC يشـد بها $A'C$. الجـزء $A'C$ يقـع تحت تأثـير نفس القـوى كما في السابق ولذا فإنه يبقى على شكله. وبما أن C اختيارية فإن (١٧) تغطي جميع الحالات.

(٥ ـ ١ ـ ٤) السقوط مع الاحتكاك

هنـاك بعض الشبـه بين تعلم حل المسـائـل العلميـة ريـاضيـا وتعلم لغة أجنبية. لنأخذ شخصا انجليزيا يرغب تعلم الفرنسية. في البداية يفكر هذا الشخص بلغته الأصلية ومن ثم يحاول ترجمة ما يريد قوله من لغته الانجليزية إلى الفرنسية. بعد شيء من التمرين، يبدأ في الإجـابـة بالفـرنسية على الأسئلة الفرنسية بدون ترجمة الأسئلة إلى الانجليزية أوالإجابة إلى الفرنسية. أخيرا بعد المثابرة والجد، يصل إلى مرحلة يستطيع التفكير بالفرنسية ولا يحتاج إلى لغتـه بتـاتـا. كذلك الحال مع المسائل العلمية، إذا توفرت الخبرة الرياضية فلا حاجة لصياغة المسـائـل الفيـزيـائيـة إلى الانجليـزيـة، نستطيـع صيـاغتها في صورة رموز رياضية مباشرة. المرحلتان الأولى والثانية تأتيان سوية.

مشكلتنـا التـاليـة هي تحديـد حركـة جسم يسقط من السكون في وسط مقاوم مثل حجر ساقـط عنـدما نأخذ مقاومة الهواء في الاعتبار. دعونا الآن نعالج التخمين الفيزيائي والصياغة الرياضية مرة واحدة.

نأخـذ جسـماً يسقـط كتلته m . نأخذ محور x عموديا إلى أسفل بحيث يسقط الجسم من المركز عندما نبدأ في التوقيت. بالإضافة إلى الشرط الابتدائي وهو $x=0$ عندما $t=0$ فإن لدينا شرطاً فيزيائيا وهو $\frac{dx}{dt} = 0$. طبعاً مكان الجسيم الساقط يعتمد على الوقت منذ سقوطه؛ x تعتمد على t أي أن $x=f(t)$. مشكلتنا تتلخص في تحديد $f(t)$. انظر الشكل (٥ـ١٧).

(0, 0) $\frac{dx}{dt} = 0$

(x, t)

x

شكل (٥-١٧)

الصعوبة تكمن في تحديد الشروط التي تعتمد عليها الحركة. بما أن

القوة = الكتلة × التسارع

فإن حجراً كتلته m يسقط تحت تأثير الجاذبية وبدون أي احتكاك يحقق العلاقة

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = mg.$$

ما هي التعديلات التي تفرضها مقاومة الهواء؟ المشكلة ليست صعبة بالنسبة لنا فقط وإنما هي غير محلولة في الحقيقة. معرفتنا حول طبيعة الاحتكاك تفتقر إلى أساس نظري جيد. ومع ذلك كلنا نعرف من التجربة أن الاحتكاك يعاكس الحركة. على هذا الأساس، إذا كانت R قوة الاحتكاك التي تقاوم حركة الجسيم m فإننا نحصل على

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = mg - R.$$

على ماذا تعتمد المقاومة R ؟ لقد دلت التجارب على أن R تزداد مع سرعة الجسيم الساقط v. افتراض أن R تتناسب طردياً مع v غير كافي، بينما افتراض تناسب R مع v^2 كثير. مع أن الافتراض الأخير غير صحيح إلا أنه أقرب إلى الحقائق. يبدو أن R تتناسب مع v^α حيث $1 < \alpha < 2$. وعلى هذا الأساس تصبح المعادلة

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = mg - Kv^\alpha,$$

حيث ثابت التنـاسب K موجب. أفضـل قيمـة تجريبيـة للأس α هي ١,٧١، إلا أن هذه القيمة ليست نهائية من الناحية النظرية.

لكي نحصـل على معـادلـة تفاضلية بسيطة يمكن حلها سنجعل α تساوي ١. وبما أن $v = \frac{dx}{dt}$ فإن

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = mg - K\frac{dx}{dt}.$$

بالقسمة على m نحصل على

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{K}{m}\frac{dx}{dt}.$$

للاختصار نجعل $k = \frac{K}{m}$ عدد موجب وتصبح معادلة الحركة

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - k\frac{dx}{dt}. \qquad (١٨)$$

المعادلة توحي بالتعويضات

$$\frac{dx}{dt} = v, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(v) = \frac{dv}{dt}.$$

بهذه التعويضات تتحول (١٨) إلى

$$\frac{dv}{dt} = g - kv.$$

هذه معادلة من الدرجة الأولى. نفصل المتغيرين

$$\int \frac{dv}{g - kv} = \int dt.$$

وبما أن

$$\frac{d}{dv}\log_e(g - kv) = -k \cdot \frac{1}{g - kv},$$

فبالتكامل نجد أن

$$-\frac{1}{k}\log_e(g-kv) = t + C,$$

و

$$\log_e(g-kv) = -kt - kC.$$

مرة أخرى نتذكر $log2 = 0.30103$ . . الخ ونكتب

$$g - kv = e^{-kt-kC}.$$

ننقل g إلى الطرف الآخر ونقسم على $-k$ ونحصل على

$$v = \frac{g}{k} - \frac{1}{k}e^{-kt-kC}. \quad (١٩)$$

الشرط الابتدائي $v = \frac{dx}{dt} = 0$ عندما $t = 0$ والمعادلة (١٩) تعطينا

$$0 = \frac{g}{k} - \frac{1}{k}e^{-k0}\cdot e^{-kC} = \frac{g}{k} - \frac{1}{k}e^{-kC},$$

إذن

$$g = e^{-kC},$$

و

$$v = \frac{g}{k} - \frac{g}{k}e^{-kt}. \quad (٢٠)$$

وبما أن $\frac{dx}{dt} = v$ فإن (٢٠) تصبح

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g}{k} - \frac{g}{k}e^{-kt}. \quad (٢١)$$

وهكذا خفضنا معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية إلى معادلتين متتاليتين من الدرجة الأولى. مع الأسف هذا ليس ممكناً دائماً.

نفصل المتغير ين في (٢١) ونحصل على

$$\int dx = \int \left(\frac{g}{k} - \frac{g}{k} e^{-kt} \right) dt,$$

إذن

$$x = \frac{g}{k} t + \frac{g}{k} \cdot \frac{e^{-kt}}{k} + C'.$$

من الشرط $x=0$ عندما $t=0$ نجد أن

$$0 = 0 + \frac{g}{k^2} \cdot e^{-k0} + C' = \frac{g}{k^2} + C'$$

أي أن

$$-\frac{g}{k^2} = C',$$

إذن

$$x = \frac{g}{k} t + \frac{g}{k^2} e^{-kt} - \frac{g}{k^2}. \quad (٢٢)$$

لقد أوجدنا $f(t)$ ، لدينا الآن قانون السقوط الحر تحت تأثير الاحتكاك.

هل يطابق هذ القانون الواقع؟ الفحص الكمي يتطلب تجارب معملية والكثير من الوقت والمال، ولذا فإننا نكتفي بفحص نوعي. نبدأ بسؤال بسيط: ما هي علاقة قانوننا هذا بقانون جاليليو الخاص بالسقوط الحر بدون مقاومة

$$x = \tfrac{1}{2} g t^2 \quad ؟$$

إذا لم يكن هناك احتكاك فإن $K=0$ وكذلك $k=0$ والمفروض أن تتحول (٢٢) إلى معادلة جاليليو. ولكن لا يمكن تعويض $k=0$ في المعادلة لأن هذا يعني القسمة على صفر؛ ويصعب

علينـا تصـور ماذا يحدث عنـدما تقترب k من الصفر. علينا أن نؤجل هذا الفحص إلى البند التالي (٥-٢-٢).

لكن (٢٢) نتيجـة من (٢٠) ولـذا نفحصهـا بصـورة غير مبـاشـرة عن طريق فحص الأخيرة. بما أن $k > 0$ فإن e^{-kt} تؤول إلى الصفر عندما تزداد t، إذن من (٢٠) نجد أن v تؤول إلى $\frac{g}{k}$ عندما تزداد t. إذن يوجد سرعة نهائية بمعنى أن سرعة الجسم الساقط لا تتعـدى السـرعـة $\frac{g}{k}$ بغض النظـر عن مدة سقـوط الجسم. تجربة رجال المظلات الذين يقفـزون من ارتفـاعـات شاهقـة تؤيـد وجـود هذه السـرعة النهائية. كذلك فقد لاحظ علماء الكيمياء وجود سرعة نهائية للأجسام التي تسقط في وسط لزج. قانوننا يتفق مع هذه الحقائق على الأقل.

الجزء الثاني: القوانين التقريبية ومتسلسلات القوة

مقدمـــــة

تلعب القوانين التقريبية دورا كبيرا في معظم التطبيقات الرياضية في مجال العلوم. كثيرا ما يحدث أن الحـل التـام معقـد جدا أو حتى غير ممكن. عنـدما يستحيل الحصول على الحل الكـامـل علينـا أن نرضى بحـل تقـريبي جيـد. ومع ذلك الأمور ليست سيئة كما نتصور. في العـادة، نستطيـع الحصول على حلول عددية مقربة إلى أي عدد من المنازل العشرية حسب الـرغبـة وخصـوصـا بمسـاعـدة الآلات الحـاسبة. الأداة الأساسية في الحصول على الحلول التقريبية جميعا هي متسلسلة القوة.

ما هي متسلسلة القوة؟ إنها مفكوك دالة في x بدلالة قوى x . وما علاقة هذا بالتقريب؟
نوضح الفكرة الأساسية بمتتالية من قيم الثابت π

3
3.1
3.14
3.14 1
3.14 15
3.14 159
3.14 159 2
3.14 159 26
3.14 159 265
3.14 159 265 3
3.14 159 265 35

لتوضيح المفهوم نكتب التقريب الأخير لـπ على الشكل الآتي

$$\pi \approx 3 + 1\left(\frac{1}{10}\right) + 4\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 1\left(\frac{1}{10}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{10}\right)^4 + 9\left(\frac{1}{10}\right)^5$$
$$+ 2\left(\frac{1}{10}\right)^6 + 6\left(\frac{1}{10}\right)^7 + 5\left(\frac{1}{10}\right)^8 + 3\left(\frac{1}{10}\right)^9 + 5\left(\frac{1}{10}\right)^{10}.$$

لدينـــا الآن تقـــريـب لـπ على صورة متسلسلة قوى $(1/10)$. لكي نحـــدد $n+1$ من الخانات العشرية الأولى للعدد π علينا أن نحسب العوامل a_0 ، a_1 ، . . . ، a_n حيث

$$\pi = a_0 + a_1\left(\frac{1}{10}\right) + a_2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + a_3\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots + a_n\left(\frac{1}{10}\right)^n + \cdots$$

كلما أخـذنـا حدودا أكثر حصلنا على تقريب أدق وبهذه الطريقة نحسب π إلى أي درجة من الصحة نرغبها.

أليس المفهوم الرئيسي واضح الآن؟ استبدل قوى $(1/10)$ بقوى x لتحصل على دالة في x:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots .$$

في هذا المفكـوك العـوامـل a_0 ، a_1 ، . . . . ، a_n ، . . . تأخذ أي قيمة عددية (وليس فقط الأعـداد صفـر، ١ ، ٢ ، . . . . ، ٩ .) تخميننـا المتفـائـل هو أن كل دالـة $f(x)$ يمكن نشرها في صورة متسلسلة في قوى x بحيث نستطيع تحديد أي قيمة للدالة إلى أي درجة من الصحة إذا أخذنا عدداً كافياً من الحدود.

الحقيقـة إن تفـاؤ لنـا في مكـانه؛ معظم الدوال الهامة يمكن نشرها بهذه الطريقة. هناك صعوبة واحدة: إن اشتراط زيادة صحة التقريب بزيادة الحدود يعني أحيانا تحديد قيم المتغير x التي يصح عندها مفكوك المتسلسلة. لكن هناك طرق لمعالجة هذا الوضع كما سنرى في (٥-٢-١).

نختتم هذه المقدمة بإعطاء بعض المفكوكات الشهيرة:

أ) بعض المفكوكات التي تصح لجميع قيم x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

ب) بعض المفكوكات التي تتطلب تحديد قيم x :

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leqslant 1)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$\log_e x = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \cdots \qquad \left(x > \frac{1}{2}\right)$$

(٥ ـ ٢ ـ ١) حساب $\sqrt[3]{28}$

قد يحتج القارىء أن قائمتنا الصغيرة لا تحوي نظرية ذات الحدين الشهيرة التي اكتشفها نيوتن عندما كان طالباً في كمبريدج. إنها

$$(1 + x)^a = 1 + \frac{ax}{1!} + \frac{a(a-1)x^2}{2!} + \frac{a(a-1)(a-2)x^3}{3!} + \cdots .$$

لم نضعها مع المجموعة (أ) لأنها تتطلب أحيانا تحديد قيم x ولم نضعها مع (ب) لأنها لا تتطلب تحديد x أحياناً أخرى. إذا كانت a عددا صحيحا موجبا مثل n فإننا نستطيع حساب $(1 + x)^n$ لأي قيمة للمتغير x بالضبط. لا ضرورة للتقريب في هذه الحالة وكذلك لا نحتاج لتحديد قيم x.

إذا لم تكن a عدداً صحيحاً موجباً فإنه لا يوجد حد أخير لمفكوك $(1 + x)^a$. وحيث إنه لا يوجد حد أخير فإننا لا نستطيع جمع الحدود واحدا بعد الآخر؛ إنها عملية لا تنتهي. في هذه الحالة نقبل بالتقريب. في الحقيقة إذا كانت القيمة المطلقة لـx أقل من ١ فإننا نستطيع الحصول على تقريبات عددية حسب الرغبة.

لماذا أحيانا نحتاج إلى تحديد x وأحياناً لا نحتاج إلى التحديد مع أن المفكوك ليس له حد أخير؟ لنفترض مفكوك π بأربعة حدود

$$3,\ \frac{1}{10},\ \frac{4}{10},\ \frac{-4}{10}.$$

هذه تعطينا التقريبات الآتية

$$3,\ 3.1,\ 3.5,\ 3.1$$

التقريب الرابع مثل الثاني أما الثالث فأسوأ منهما. في الحقيقة الثالث أسوأ حتى من الأول. أليس واضحا من هذا المثال الحاجة إلى تحديد الحجم النسبي للحدود المتتالية؟

نحتـاج إلى مفكـوك يكـون كل حد فيه بعد الحدود الأولى ، كسر من الحد الذي يسبقه ، ولذا نستطيـع إهمال الحـدود الأخيرة في المفكوك بدون الحصول على خطأ كبير . أليس واضحاً أنه كلما صغـرت x في مفكـوك $(1 + x)^a$ فإننـا نحتـاج إلى حدود أقـل للحصول على صحة معينـة مثـل خمس خانـات عشـريـة؟ إن تحديـد أكبر قيمة لـx تحقق شرطنا لمتسلسلة معينة أمر صعب ويتطلب نظرية النهايات . إننا نحتاج فقط لمعرفة ما إذا كان تحديد قيم x ضروريًا وما هو في تلك الحـالـة . لقـد أعطينا بعض الأمثلة في (ب) . يبقى السؤال : لماذا بعض المتسلسلات مثـل مجمـوعـة (أ) تحقق شرطنا بدون تحديد المتغير x؟ في هذه المتسلسلات نستطيع أن نصل إلى مرحلة يصبح كل حد كسر من سابقه بغض النظر عن القيمة المطلقة للمتغير x. إذا كانت x صغيرة فإننا نصل هذه المرحلة بعد عدد قليل من الحدود؛ وإذا كبرت x فإننا لا نصل إلى هذه المرحلة إلا بعد عدد كبير من الحدود .

سنوضح أهمية متسلسلات القوة عن طريق حساب الجذر الثالث لـ28 عن طريق نظرية ذات الحدين . كيف نطبق النظرية؟ نكتب الجذر كالتالي

$$\sqrt[3]{28} = (28)^{1/3}$$

إذن $a = \frac{1}{3}$ وكذلك $28 = 1 + x$ أي $x = 27$. إذن

$$\sqrt[3]{28} = (1 + 27)^{1/3}$$

وبما أن a ليس عددا صحيحا موجبا ، فعلينا تحديد x وذلك بجعل قيمتها المطلقة أقل من ١ ، ولكن هذا ليس صحيحـا بالنسبـة للعـدد 27 . ذكرنا سابقا إن هناك طرقاً للتغلب على القيود المفروضة على x. إننا نبحث عن تقريب للعدد $\sqrt[3]{28}$. التقريب المطلوب أكثر بقليل من 3. لماذا أكثر بقليل؟ لأن $27 = 3^3$. ألا يوحي هذا بكتابة الآتي؟

$$1 + 27 = 27\left(\frac{1}{27} + 1\right)$$

إذن

$$\sqrt[3]{28} = \left\{27\left(1+\frac{1}{27}\right)\right\}^{1/3} = 27^{1/3}\left(1+\frac{1}{27}\right)^{1/3} = 3\left(1+\frac{1}{27}\right)^{1/3}.$$

الآن x في $(1+x)^{1/3}$ تساوي $1/27$ وهذه تحقق القيد. لاحظ أن x صغيرة بالنسبة للوحدة. إننا نتوقع أن نصل إلى المرحلة التي يكون فيها كل حد يساوي كسراً صغيراً من الحد الذي يسبقه ولذا فإننا نحصل على التقريب المطلوب بدون الحاجة لحساب الكثير من حدود المتسلسلة.

نطبق مفكوك نظرية ذات الحدين حيث $a = 1/3$ و $x = 1/27$ ونجد

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{28} &= 3\left(1+\frac{1}{27}\right)^{1/3} \\
&= 3\left\{1+\frac{\frac{1}{3}}{1!}\left(\frac{1}{27}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{27}\right)^2 \right.\\
&\qquad \left. +\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{1}{27}\right)^3+\cdots\right\} \\
&= 3\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{27}\right)-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{27}\right)^2+\frac{10}{27}\cdot\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{27}\right)^3+\cdots\right\} \\
&= 3\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{27}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{27}\right)^2+\frac{5}{81}\left(\frac{1}{27}\right)^3+\cdots\right\} \\
&= 3+\left(\frac{1}{27}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{27}\right)^2+\frac{5}{27}\left(\frac{1}{27}\right)^3+\cdots \\
&= 3 \\
&\quad +0.037\ 037\ \ldots \qquad \left(\approx +\tfrac{1}{27}\right) \\
&\quad -0.000\ 457\ \ldots \qquad \left(\approx -\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{27}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$+\ 0.000\ 010$ أقل من $\quad (\approx + \frac{5}{27}(\frac{1}{27})^3)$

$-\ 0.000\ 000...$ $\quad$ (الحد الرابع وما يليه $\approx$)

إنه شيء يدعو إلى الارتياح. من البداية، كل حد يساوي كسراً صغيراً من الحد الذي يسبقه وكلما أخذنا حدودا أكثر ازداد صغرها. أين نتوقف؟ هذا يعتمد على الدقة المطلوبة. الحد الثالث وما يليه من حدود لا تؤثر على الخانتين العشريتين الأوليتين، إذاً الحد الأول والثاني يعطيان قيمة $\sqrt[3]{28}$ إلى منزلتين عشريتين وهذه هي *3.03*. الحد الرابع والحدود التالية لا تؤثر على المنازل الثلاث الأولى وعليه فإن الحدود الأولى الثلاثة تعطي قيمة الجذر التكعيبي إلى ثلاث خانات أي *3.036*. باستعمال الحد الرابع، نحصل على الجذر التكعيبي *3.0365* إلى أربع خانات عشرية.

طبعا يمكن تطبيق هذه الطريقة على جذور تكعيبية أخرى. مثلا

$$\sqrt[3]{45} = (27+18)^{1/3} = \left\{27\left(1+\frac{2}{3}\right)\right\}^{1/3} = 27^{1/3}\left(1+\frac{2}{3}\right)^{1/3}$$
$$= 3\left(1+\frac{2}{3}\right)^{1/3}.$$

هنا x ليست صغيرة جدا، *2/3* بدلا من *1/27* ولذا فإننا نتوقع جهد أكثر للحصول على نفس الدقة. وطبعا لا يحتاج أن نؤكد أن إمكانيات هذه الطريقة ليست محصورة على حساب الجذور التكعيبية. نأخذ مثلا آخر. لنحسب $\sqrt[5]{239}$. ما هو أقرب عدد صحيح؟

$$3^5 = 243 \qquad\qquad 2^5 = 32$$

واضح أن *3* أقرب عدد صحيح للجذر. إذن نكتب

$$239 = 243 - 4 = 243\left(1-\frac{4}{243}\right) = 3^5\left(1-\frac{4}{243}\right),$$

إذن

$$\sqrt[5]{239} = \left\{3^5\left(1 - \frac{4}{243}\right)\right\}^{1/5} = (3^5)^{1/5}\left(1 - \frac{4}{243}\right)^{1/5} = 3\left(1 - \frac{4}{243}\right)^{1/5},$$

ومن ثم نطبق نظرية ذات الحدين كالمعتاد.

لاحظ أنه إذا كانت x صغيرة جدا فإن

$$(1 + x)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}x.$$

مثلا

$$\sqrt[3]{1001} = 10\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1/3} \approx 10\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1000}\right) \approx 10.003.$$

بصوة عامة، إذا كانت x صغيرة جدا فإن

$$(1 + x)^a \approx 1 + ax.$$

مفكوكات ذات الحدين ذات أهمية عملية كبرى.

(٥ ـ ٢ ـ ٢) السقوط مع الاحتكاك مرة أخرى

إن عدم تأمل المرء في نتائج أبحاثه لدليل قاطع على عدم اهتمامه بها. الشخص المهتم حقا لا يستطيع منع نفسه من التفكير والبحث عن الحل لمشكلته في البداية ومن ثم فحص حله بعد الحصول عليه. في السابق، كان لدينا فكرة جيدة وإن كانت واضحة لفحص قانوني السقوط الحر مع المقاومة (٢٠)، (٢٢). عندما تصبح قوة الاحتكاك صفراً فإن قانوني السرعة v والإزاحة x يصبحان قانوني جاليليو للسقوط الحر

$$v = gt$$

$$x = \frac{1}{2} gt^2.$$

بمعنى آخـر، عنـدمـا نأخـذ مقـاومـة الهـواء في الاعتبار فإن قانوني جاليليو يحتاجان إلى تعديل. مقاومة الهواءتعيق حركة الجسم. سنخمن عامل تصحيح يقلل من السرعة v ويعتمد طبعاً على t. نخمن الآتي

$$v = gt - c(t)$$

حيث $c(t)$ عامـل التصحيـح وهـو دالة موجبة في t. إذا كان الجسم لا يسقط بسرعة فإنه كذلك لا يقطع مسافة كبيرة، تخميننا للإزاحة هو

$$x = \frac{1}{2} gt^2 \;\; d(t)$$

حيث $d(t)$ دالة موجبة في t.

لقـد كان لدينـا خطـة جيدة ولكننا لم نتمكن من تطبيقها حينئذ. الآن نستطيع بمساعدة متسلسلات القوة. الآن يمكن التعامل مع (٢٠) و(٢٢).

نبدأ بالمعادلة (٢٠). نعوض $-kt$ بدلا من x في مفكوك e^x المعطى في (أ) ونحصل على

$$e^{-kt} = 1 - \frac{kt}{1!} + \frac{k^2t^2}{2!} - \frac{k^3t^3}{3!} + \frac{k^4t^4}{4!} - \ldots, \qquad (٢٣)$$

وحيث إنه لا يوجد قيود على قيم x وكذلك لا يوجد قيود على kt، إذن مهما كانت قيمة kt فإن المعادلة (٢٠) تقتضي

$$v = \frac{g}{k} - \frac{g}{k}\left(1 - \frac{kt}{1} + \frac{k^2t^2}{2!} - \frac{k^3t^3}{3!} + \frac{k^4t^4}{4!} - \ldots\right).$$

نضرب في الحدين الأولين من القوس ونحصل على

$$v = \frac{g}{k} - \frac{g}{k} + gt - \frac{g}{k}\left(\frac{k^2t^2}{2!} - \frac{k^3t^3}{3!} + \frac{k^4t^4}{4!} - \ldots\right),$$

نأخذ العامل المشترك kt من القوس

$$v = gt - \frac{g}{k} \cdot kt\left(\frac{kt}{2!} - \frac{k^2t^2}{3!} + \frac{k^3t^3}{4!} - \dots \right),$$

إذن

$$v = gt - gt\left\{ \frac{1}{2!}(kt) - \frac{1}{3!}(kt)^2 + \frac{1}{4!}(kt)^3 - \dots \right\}. \qquad (٢٤)$$

وهكذا حصلنا على متسلسلة قوة للسرعة v .

المعادلة (٢٤) شيقة بالإضافة إلى كونها معقدة. إنها تستحق بعض التأمل. لاحظ أولا أنه عندما نجعل $k=0$ فإن كل حد في القوس الكبير يصبح صفراً، ولذا ففي حالة انعدام الاحتكاك فإن القانون يصبح قانون جاليليو:

$$v = gt$$

وهكذا تحققنا من صحة ما توقعناه. ثانياً، قارن متسلسلة القوة في القوس الكبير بمفكوك $(1 + 1/27)^{1/3}$ المعطى سابقاً. ألا يوجد تشابه شديد بينهما؟ لدينا هنا قوى kt بدلا من قوى $1/27$. حقا، المعادلة (٢٤) صحيحة مهما كانت قيمة kt ولكن أليس من الأفضل لو كانت kt صغيرة؟ نحن نعرف من التجربة أن k صغيرة جدا. وعليه فإن kt صغيرة إذا لم تكن t كبيرة. لاحظ أن كل حد في القوس الكبير هو كسر من kt مضروباً في سابقه. فإذا كانت kt أصغر بكثير من ١ فإن كل حد يصبح جزءاً من كسر صغير من سابقه. ماذا نستنتج من هذا كله؟ نستطيع حذف القوى الكبيرة لـ kt بدون خسارة كبيرة في الدقة ؛ أي

$$v = gt - gt\left\{ \tfrac{1}{2}(kt) + \text{تقريبا لا شيء} \right\}$$

أي أن

$$v = gt - \tfrac{1}{2}\, gkt^2$$

تقريب جيد. كلما كانت kt صغيرة كان التقريب أدق. وهكذا نتحقق من تخميننا

$$v = gt - c_1(t)$$

حيث $c_1(t)$ حد تصحيح يعتمد على الزمن t.

يجدر بنا ملاحظة أنه لو لم تكن kt صغيرة بصورة كافية تُمكننا من إهمال الحد الثاني وما يليه من قوى، فإننا مع ذلك نستطيع التحقق من التخمين السابق من المعادلة (٢٤) مباشرة. جميع الحدود في القوس الكبير على الشكل الآتي:

$$\left\{\left[\frac{1}{2!}(kt) - \frac{1}{3!}(kt)^2\right] + \left[\frac{1}{4!}(kt)^3 - \frac{1}{5!}(kt)^4\right] + \ldots\right\}. \qquad (٢٥)$$

إذا كانت $0 < kt < 3$ فإن الحدود التي تساوي ثلث kt أو أصغر من ذلك تكون أصغر من الواحد

$$\left[\frac{1}{2!}(kt) - \frac{1}{3!}(kt)^2\right] = \frac{1}{2}kt\left(1 - \frac{1}{3}kt\right) = \text{كمية موجبة}$$

$$\left[\frac{1}{4!}(kt)^3 - \frac{1}{5!}(kt)^4\right] = \frac{1}{4!}kt\left(1 - \frac{1}{5}kt\right) = \text{كمية موجبة}$$

وهكذا بالنسبة للأزواج التالية. إذن القوس الكبير في (٢٥) لا يزال كمية موجبة وعليه فإن حد التصحيح دالة موجبة في t.

الآن نعالج (٢٢) بنفس الأسلوب. بالتعويض من (٢٣) نجد

$$x = \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2} + \frac{g}{k^2}\left(1 - \frac{kt}{1} + \frac{k^2t^2}{2!} - \frac{k^3t^3}{3!} + \frac{k^4t^4}{4!} - \frac{k^5t^5}{5!} + \ldots\right)$$

$$= \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2} + \frac{g}{k^2} - \frac{g}{k}t + \frac{1}{2}gt^2 + \frac{g}{k^2}\left(-\frac{k^3t^3}{3!} + \frac{k^4t^4}{4!} - \frac{k^5t^5}{5!} + \ldots\right),$$

بعد التبسيط نجد

$$x = \frac{1}{2} gt^2 + \frac{g}{k^2}\left(- \frac{k^3t^3}{3!} + \frac{k^4t^4}{4!} - \frac{k^5t^5}{5!} + \ldots \right).$$

نخرج العامل k^2t^2 ـ من القوس ونحصل على

$$x = \frac{1}{2} gt^2 - \frac{g}{k^2} \cdot k^2t^2\left(+ \frac{kt}{3!} - \frac{k^2t^2}{4!} + \frac{k^3t^3}{5!} - \ldots \right),$$

إذن

$$x = \frac{1}{2} gt^2 - gt^2\left\{ \frac{1}{3!}(kt) - \frac{1}{4!}(kt)^2 + \frac{1}{5!}(kt)^3 - \ldots \right\}. \quad (٢٦)$$

هذه متسلسلة قوة لـ x أيضاً.

قارن (٢٦) بـ (٢٤). إذا كانت $k=0$ فإن كل حد في القوس الكبير من المعادلة (٢٦) يتلاشى، ويصبح القانون قانون جاليليو

$$x = \tfrac{1}{2} gt^2,$$

كما توقعنا. إذا أهملنا القوة الثانية لـkt وما فوقها نجد أن

$$x = \frac{1}{2} gt^2 - gt^2\left\{ \frac{1}{3!}(kt) - \text{تقريبا لا شيء} \right\}$$

أي أن

$$x = \tfrac{1}{2} gt^2 - \tfrac{1}{6} gkt^3$$

يمثل تقريبا جيداً (إذا كانت kt صغيرة) . وهذا يحقق تخميننا

$$x = \frac{1}{2} gt^2 - c_2(t)$$

حيث $c_2(t)$ حد تصحيح موجب يعتمد على t. نترك للقارىء إثبات أن حد التصحيح موجب إذا كانت $0 < kt < 4$ وذلك بنفس الطريقة التي اتبعناها آنفا .

لا نستطيع أن ندعي أن القانونين

$$v \approx gt - \frac{1}{2} gkt^2$$

$$x \approx \frac{1}{2} gt^2 - \frac{1}{6} gkt^3$$

ذات أهمية عملية كبيرة . تذكر أنهما مبنيان على الفرضية التجريبية غير الدقيقة القائلة بأن المقاومة تتناسب طرديًا مع السرعة وليس مع القوة ١,٧١ للسرعة .

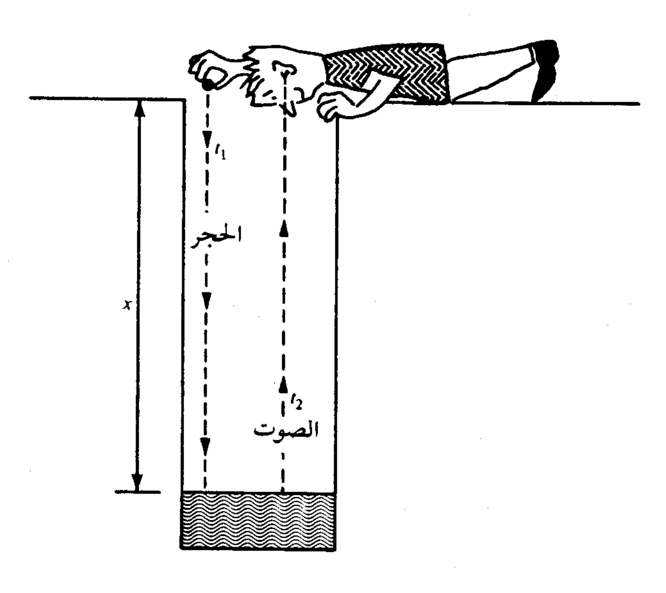
من أجل التوضيح ، ضحينا بالواقعية في سبيل البساطة الرياضية . المهم هنا هودور متسلسلات القوة في استنتاج هذه التقريبات الجيدة والبسيطة لمعادلات صعبة مثل (٢٠) و(٢٢) .

(٥ ـ ٢ ـ ٣) كم عمق البئر؟

كان نيوتن يعتقد أن حل المسائل الكلامية أساسي لتعلم الرياضيات . وقد ألف كتابا للمرحلة الثانوية ليعزز اعتقاده . اعتقاده هذا قد لا يروق للكثير من المحدثين حيث إنه يتعارض مع سيل الكتب التي تظهر هذه الأيام : يجب أن لا ننسى أن نيوتن كرياضي يمتاز على أفضل مؤلفي الكتب المعاصرين . لا نستطيع هنا إلا معالجة واحدة من مسائل نيوتن الجيدة . القارىء الذي لديه الرغبة في قراءة كتاب نيوتن بنفسه ، قد ينصدم إذا علم أن نيوتن

كتبه باللاتيني . ولكن يوجد ترجمة باللغة الانجليزية : *Universal Algebra*. يجب أن لا يُسمح لأي معلم أن يحذف المسائل الكلامية من المنهج حتى يقرأ نيوتن باللاتيني .

المسألـة هي حسـاب عمق بئـر. الطـريقـة هي حساب الزمن اللازم لسقوط حجر فيه . النقطة الأساسية هي أنه عندما يصل الحجر إلى القاع ، علينا أن ننتظر وصول صوت ارتطام الحجر بالماء .



شكل (٥ـ١٨)

نفترض حجراً وساعة وبئراً وشخصاً منبطحاً كما في الشكل (٥ـ١٨) . ليكن t_1 الزمن اللازم لوصول الحجر إلى قاع البئر الذي عمقه x ، ولتكن t_2 الزمن اللازم لوصول الصوت إلى أعلى البئر. (كالعادة نفترض ظروفاً مثالية ونعتبر الماء عند قاع البئر) الوقت t الذي نقيسه بالساعة يمثل الفترة بين سقوط الحجر وسماع الصوت أي

$$t = t_1 + t_2.$$

نهمل مقاومة الهواء ونطبق قانون جاليليو:

$$x = \frac{1}{2} g t_1^2.$$

نفترض الشيء الطبيعي وهو أن الصوت ينتقل في مسار مستقيم وبسرعة ثابتة c .

إذن

$$t_2 = \frac{x}{c}.$$

المعطيات هي t ، g وc والمطلوب حساب x. كما أشار نيوتن لدينا ثلاثة مجاهيل t_1 ، t_2 ، x وثلاث معادلات. عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل ولذا نتوقع إمكانية حساب x. ولكننا لا نحتاج إلى المجهولين t_1 و t_2 . إذن نتخلص منهما. من المعادلة الثانية نحصل على

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

نعوض عن t_1 و t_2 في معادلتنا الأولى ونجد

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{c}.$$

لم يبق إلا أن نحل المعادلة للمجهول x بدلالة الوقت t الذي قسناه بالساعة. كيف نحل مثل هذه المعادلة؟ تمعنها جيداً. لاحظ أنها تحوي $\sqrt{x}$ وx أي $(\sqrt{x})^2$. إذن لدينا معادلة من الدرجة الثانية في $\sqrt{x}$ ولكنها في صيغة مقنَّعة. نزيل القناع:

$$\frac{1}{c}(\sqrt{x})^2 + \sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{x}) = t.$$

إذا أوجدنا $\sqrt{x}$ نستطيع إيجاد x بالطبع. لحل هذه المعادلة من الدرجة الثانية لدينا خياران: إما القانون وهذه هي الطريقة الببغاوية أو الطريقة الفطرية البديهية وهي إكمال المربع. ربما أن

القـاريء نسي القـانـون ولكنـه لا يمكن أن يفقد بديهته . سنكمل المربع . لكن قبل أن نأخذ نصف معامل $\sqrt{x}$ ، من المناسب أن ندخل العامل 2 إلى هذا المعامل وذلك بالضرب في $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{c}(\sqrt{x})^2 + 2\frac{1}{\sqrt{2g}}(\sqrt{x}) = t.$$

نجعل معامل $(\sqrt{x})^2$ يساوي الوحدة

$$(\sqrt{x})^2 + 2\frac{c}{\sqrt{2g}}(\sqrt{x}) = ct.$$

نصف معامل $\sqrt{x}$ هو $c/\sqrt{2g}$. نربع ونضيف إلى الطرفين :

$$(\sqrt{x})^2 + 2\frac{c}{\sqrt{2g}}(\sqrt{x}) + \frac{c^2}{2g} = \frac{c^2}{2g} + ct,$$

أي

$$\left(\sqrt{x} + \frac{c}{\sqrt{2g}}\right)^2 = \frac{c^2}{2g} + ct,$$

إذن

$$\sqrt{x} + \frac{c}{\sqrt{2g}} = \pm\sqrt{\frac{c^2}{2g} + ct},$$

ومنه

$$\sqrt{x} = -\frac{c}{\sqrt{2g}} \pm\sqrt{\frac{c^2}{2g} + ct}.$$

هذه المعادلة محجلة . البئر له عمق واحد ، وهذا يعني أن x تأخذ قيمة واحدة فقط ، ولكن المعـادلـة تعطي قيمتـين . لدينا خيار بين الإشارة الموجبة والسالبة . لا تتذمر وتتهرب ، اكتسب العـادة الصحيحـة : غيرِّ المعطيـات . إننـا نعـرف الجـواب في بعض الحـالات الخاصة . إذا

كانت $t=0$ فإن عمق البئر يساوي صفرا طبعا. لكن إذا أخذنا الإشارة السالبة فإن $t=0$ تعطينا النتيجة غير المعقولة وهي

$$\sqrt{x} = \frac{-2c}{\sqrt{2g}} \neq 0 \cdot$$

إذن نأخذ الإشارة الموجبة (إن كون $t=0$ يعطينا $x=0$ عندما نأخذ الجذر الموجب يعتبر بمثابة تحقيق جزئي لعملياتنا الجبرية).

$$\sqrt{x} = -\frac{c}{\sqrt{2g}} + \sqrt{\frac{c^2}{2g} + ct}$$

الآن حصلنا على $\sqrt{x}$.

لكي نوجد x نربع

$$x = \frac{c^2}{2g} - \frac{2c}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{c^2}{2g} + ct} + \frac{c^2}{2g} + ct$$

بعد التبسيط نحصل على

$$x = \frac{c^2}{g} + ct - \frac{2c}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{c^2}{2g} + ct} \qquad (٢٧)$$

هذا قانون معقد. ألا يمكن تبسيطه أكثر؟ الحد الأخير يحتوي على $2g$ مرتين وفي كل مرة تحت الجذر. دعونا نستفيد من هذه الملاحظة:

$$\frac{c^2}{2g} + ct = \frac{1}{2g}(c^2 + 2gct),$$

إذن

$$\sqrt{\frac{c^2}{2g} + ct} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \sqrt{c^2 + 2gct},$$

ومنه

$$\frac{2c}{\sqrt{2g}} \cdot \sqrt{\frac{c^2}{2g} + ct} = \frac{2c}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{c^2 + 2gct} \qquad (٢٨)$$

$$= \frac{c}{g} \sqrt{c^2 + 2gct}$$

نستطيع التبسيط أكثر إذا ضحينا بقليل من الدقة.

قبل أن ننشر الجذر في (٢٨) علينا أن نضعه في الصيغة

$\sqrt{1 + y}$ حيث $-1 < y < 1$

هل نستطيع عمل هذا؟ أي حد من $\sqrt{c^2 + 2gct}$ يصبح الوحدة؟ c تساوي ١١٠٠ قدم/ثا تقريبا وكذلك g تساوي ٣٢ قدم/ثا٢ ،
إذن $c/2g$ يساوي $1100/64$ تقريبا. إذن، إذا كانت

$$t < \tfrac{1100}{64} = 17\tfrac{3}{16}$$

فإن $64t < 1100$ أي $2gt < c$

ومنه $2gct < c^2$ أو $\frac{2gct}{c^2} < 1$

ولكن سقوط الحجر لا يستغرق ١٧ ثانية في الآبار العادية، إنها ليست عميقة جدا ـ إذا استغرق حجر في السقوط ١٤ ثانية فإنه يسقط مسافة ٢/١×٣٢×١٤٢ أي ٣١٣٦ قدماً حسب قانون جاليليو، ويبقى ثلاث ثوان لانتقال الصوت. إن مجال اهتمامنا هنا آبار الماء وليست آبار الزيت. يكفينا أن نجعل

$$\frac{2gct}{c^2} < 1$$

أي

$$\frac{2gt}{c} < 1.$$

يبقى أن نحول الجذر في (٢٨) إلى الصيغة

$$\sqrt{1 + \frac{2gt}{c}}\ .$$

$$\sqrt{c^2 + 2gct} = \sqrt{c^2\left(1 + \frac{2gct}{c^2}\right)} = \sqrt{c^2}\sqrt{1 + \frac{2gt}{c}}$$
$$= c \cdot \sqrt{1 + \frac{2gt}{c}}\ ,$$

إذن

$$\frac{c}{g}\sqrt{c^2 + 2gct} = \frac{c^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gt}{c}}\ .$$

من (٢٨) نحصل على

$$\frac{2c}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{c^2}{2g} + ct} = \frac{c^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gt}{c}}$$

وتصبح (٢٧)

$$x = \frac{c^2}{g} + ct - \frac{c^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gt}{c}}\ . \qquad (٢٩)$$

من الأفضل أن نتأكد من صحة هذا القانون قبل أن ننشره في متسلسلة قوة. طبعا لا نستطيع الحصول على تأكيد مطلق ولكن يمكن اختبار القانون. حيث إن (٢٩) قانون

فيزيائي نستطيع تطبيق اختبار الأبعاد عليه. نأخذ السنتيمتر والثانية كوحدات الطول والزمن وأما الكتلة فليست واردة. من هنا نجد

$x = cm$ و $t = sec$

$$c = \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1} \quad \text{و} \quad g = \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}.$$

إذن المعادلة (٢٩) تصبح

$$\begin{aligned} \text{cm} &= \frac{\text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}}{\text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}} + (\text{cm} \cdot \text{sec}^{-1})\text{sec} \\ &\qquad - \frac{\text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}}{\text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}} \sqrt{1 + \frac{(\text{cm} \cdot \text{sec}^{-2})\text{sec}}{\text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}}} \\ &= \text{cm} + \text{cm} - \text{cm}\sqrt{1+1} \\ &= \text{cm} + \text{cm} - \text{cm} \\ &= \text{cm}. \end{aligned}$$

تذكر أن $\sqrt{2}$ عدد مطلق وأبعاده صفر. بعد تحقق اختبار الأبعاد نتابع بشيء من الثقة.

إن توقع نتيجة طريقة ما عادة ذهنية جيدة. ماذا نتوقع من مفكوك متوالية القوة؟ لو سمعنا صوت سقوط الحجر في الماء عند حدوثه مباشرة لحسبنا x من قانون جاليليو

$$x = \tfrac{1}{2} g t^2.$$

إذن نتوقع

$$x = \tfrac{1}{2} g t^2 + h$$

حيث h حد تصحيح.

إذا تمعنا في ظروف المسألة نستطيع الحصول على معلومات أدق. الزمن t ينقسم بين الحجر والصوت. بما أن الحجر لا يسقط لمدة t فإنه لا يسقط مسافة $\frac{1}{2}gt^2$. إذن حد التصحيح سالب. عندما نستطيع رؤية وسماع الحجر وهو يسقط في الماء فإننا نعلم أن الرؤية والصوت ينتقلان بصورة آنية تقريبا. إن الحجر يأخذ نصيب الأسد من t. حد التصحيح السالب سيكون صغيرا.

من معرفتنا لما سيحدث نتابع ونجعل $a = \frac{1}{2}$ في نظرية ذات الحدين

$$(1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \ldots$$

نجعل $x = 2gt/c$ لنحصل على مفكوك $\sqrt{1 + 2gt/c}$، ومن هذا تصبح (٢٩)

$$x = \frac{c^2}{g} + ct - \frac{c^2}{g}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2gt}{c}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{2gt}{c}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{2gt}{c}\right)^3 - \frac{5}{128}\left(\frac{2gt}{c}\right)^4 + \frac{7}{256}\left(\frac{2gt}{c}\right)^5 - \frac{21}{1024}\left(\frac{2gt}{c}\right)^6 + \ldots\right\}.$$

نفك الحدود الثلاثة الأولى من القوس

$$x = \frac{c^2}{g} + ct - \frac{c^2}{g} - ct + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{c^2}{g}\left\{\frac{1}{16}\left(\frac{2gt}{c}\right)^3 - \frac{5}{128}\left(\frac{2gt}{c}\right)^4 + \frac{7}{256}\left(\frac{2gt}{c}\right)^5 - \frac{21}{1024}\left(\frac{2gt}{c}\right)^6 + \ldots\right\}.$$

بعد التبسيط

$$x = \frac{1}{2} gt^2 - \frac{c^2}{g} \left\{ \frac{1}{16} \left(\frac{2gt}{c} \right)^3 - \frac{5}{128} \left(\frac{2gt}{c} \right)^4 + \frac{7}{256} \left(\frac{2gt}{c} \right)^5 - \frac{21}{1024} \left(\frac{2gt}{c} \right)^6 + \ldots \right\}.$$

نخرج العامل $(2gt/c)^2$ من القوس الكبير

$$x = \frac{1}{2} gt^2 - \frac{c^2}{g} \cdot \frac{4g^2t^2}{c^2} \left\{ \frac{1}{16} \left(\frac{2gt}{c} \right) - \frac{5}{128} \left(\frac{2gt}{c} \right)^2 + \frac{7}{256} \left(\frac{2gt}{c} \right)^3 - \frac{21}{1024} \left(\frac{2gt}{c} \right)^4 + \ldots \right\},$$

إذن

$$x = \frac{1}{2} gt^2 - 4gt^2 \left\{ \frac{1}{16} \left(\frac{2gt}{c} \right) - \frac{5}{128} \left(\frac{2gt}{c} \right)^2 + \frac{7}{256} \left(\frac{2gt}{c} \right)^3 - \frac{21}{1024} \left(\frac{2gt}{c} \right)^4 + \ldots \right\}.$$

هذه معـادلـة شبيهـة بالمعـادلة (٢٦). لكي نؤكد هذا الشبه سوف ندخل العامل 4 إلى داخل القوس الكبير

$$x = \frac{1}{2} gt^2 - gt^2 \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{2gt}{c} \right) - \frac{5}{32} \left(\frac{2gt}{c} \right)^2 + \frac{7}{64} \left(\frac{2gt}{c} \right)^3 - \frac{21}{256} \left(\frac{2gt}{c} \right)^4 + \ldots \right\}. \quad (٣٠)$$

من المفيد أن نقارن (٣٠) مع (٢٦). لكي نسهل المقارنة نعيد كتابة (٢٦)

$$x = \frac{1}{2}gt^2 - gt^2\left\{\frac{1}{3!}(kt) - \frac{1}{4!}(kt)^2 + \frac{1}{5!}(kt)^3 - \frac{1}{6!}(kt)^4 + \ldots\right\}$$

الفرق في داخل القوس الكبير فقط، أولا نلاحظ متتالية جديدة من العوامل:

$$\frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \frac{7}{64}, \frac{21}{256}, \ldots$$

بدلا من

$$\frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, \frac{1}{6!}, \ldots$$

ولكن المتتالية الجديدة تتناقص باستمرار مثل القديمة. ثانيا، نلاحظ قوى $2gt/c$ بدلا من قوى kt ولكن القوى هي نفسها. ماذا نستنتج؟ إن القيمة العددية للقوس الكبير في (٣٠) موجبة إذا كانت $2gt/c$ صغيرة وهذا يحقق توقعنا أن

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2 + c$$

حيث c حد تصحيح سالب.

يمكن إهمال القوة الثانية لـ $2gt/c$ وما يليها لأنها صغيرة ونحصل على

$$x = \frac{1}{2}gt^2 - gt^2\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{2gt}{c}\right) - \text{تقريبا لا شيء}\right\}$$

أي أن

$$x = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}\frac{g^2t^3}{c}$$

وهذا تقريب جيد عندما تكون $2gt/c$ صغيرة.

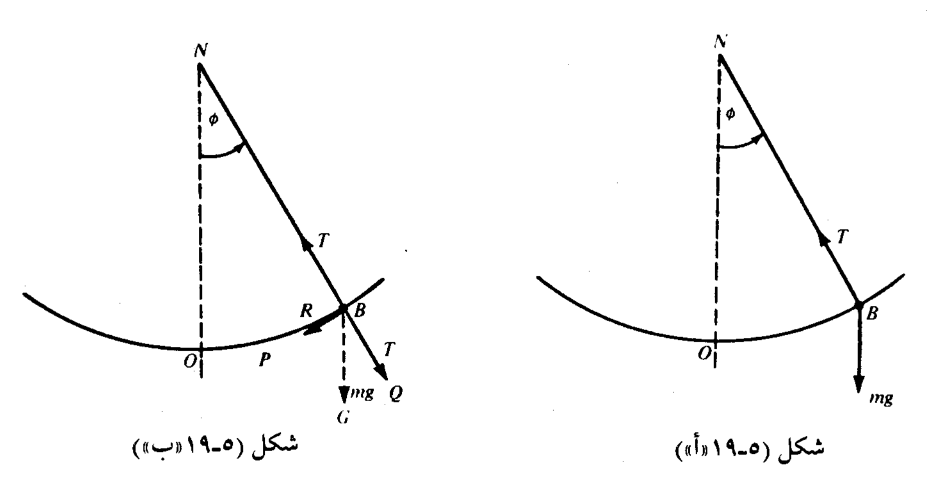
أليس مدهشـا أن يكـون لمسألتـين فيـزيائيتين مختلفتين تماماً مثل السقوط الحر مع المقاومة وعمق البئـر حلول متشـابهة؟ إن هذا التشابه دليل على أهمية وفائدة متسلسلات القوة. علينا أن نستعـد لهذه الطـرق الـريـاضية التي تحل مسائل مختلفة من شتى فروع الفيزياء بعد إجراء القليل من التعديلات البسيطة.

(٥ ـ ٢ ـ ٤) البندول: الذبذبات الصغيرة

في السـابق افـترضنا أن زمن الدورة الكاملة (T) يعتمد على طول البندول (l) وثابت الجاذبية (g) وبواسطة تحليل الأبعاد توصلنا إلى

$$T = c\sqrt{\frac{l}{g}}$$

حيث c كمية مستقلة عن l وg. إن حصولنا على هذا كله من بعض الملاحظات البسيطة لشيء مدهش. إن عدم قدرتنـا على إثبـات أن $c = 2\pi$ ليس غريبـاً أبـداً. لدينـا الآن الطـريقـة الرياضية التي تصيغ المسألة في صورة معادلة تفاضلية. دعونا نطبقها.



شكل (٥-١٩«ب»)

شكل (٥-١٩«أ»)

على ماذا تعتمـد حركـة البنـدول؟ لا تستعجـل، علينـا أن نمشي قبل أن نركض. أولا نتساءل: ما هي القوة التي تسبب التسارع؟ راجع الشكل [٥-١٩(أ)]. القوى التي تؤثر على

الكـرة الصغـيرة B هي شد الخيـط T وقـوة الجـاذبيـة mg إلى أسفـل. إذن سبب التسارع هو المحصلة R. ما هي المحصلة R؟ بدلا من استخدام متوازي أضلاع القوى سوف نحلل mg إلى مركبتيهـا الأولى على امتـداد الخيـط والثانية عمودية عليه. انظر الشكل [٥-١٩(ب)]. حيث إن الخيط غير قابل للاستطالة ويبقى دائما مشدودا فإن مركبة mg الممثلة بـ $\overrightarrow{BQ}$ تساوي وتعاكس الشد T. ونتيجة لذلك نجد أن مركبة mg العمودية على الخيط، $\overrightarrow{BP}$ هي المحصلة R. من هنـدسـة الشكـل، نجـد أن $\angle GBQ = \phi$ حيث $\varnothing$ الزاوية بين NB والخط الرأسي NO. من هذا نجد أن

$$R = mg \cdot \sin \phi. \quad (٣١)$$

لقد حسبنا القوة التي تسبب التسارع.

ما هو تسارع الكرة؟ لا تتسرع. أولا ما هي السرعة؟ انظر الشكل (٥-٢٠). في الفترة $\triangle t$ يدور الخيط خلال الزاوية $\triangle\phi$ وتتحرك الكرة على قوس طوله $l \cdot \triangle\phi$ وتكون السرعة المتـوسطـة في هذه الفترة $l(\triangle\phi/\triangle t)$. نتذكر رمز ليبنتز ونكتب السرعة الآنية $l(d\phi/dt)$. لكن التسارع هو معدل تغير السرعة، إذن التسارع هو

$$a = \frac{d}{dt}\left\{l\frac{d\phi}{dt}\right\} = l\frac{d}{dt}\left(\frac{d\phi}{dt}\right) = l\frac{d^2\phi}{dt^2} \quad (٣٢)$$

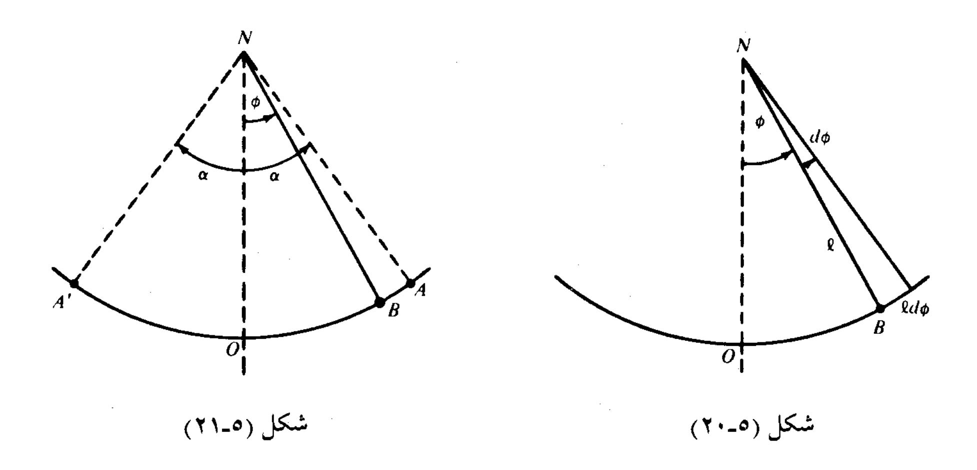
وبذا نكون قد حسبنا التسارع

ما هي العلاقة بين التسارع والقوة التي تسببه؟ إنها

القوة = الكتلة × التسارع

ولكن من الخطأ أن نكتب المعادلة

$$ma = R$$



شكل (٥-٢١)

شكل (٥-٢٠)

لقد قسنا a على القوس في اتجاه تزايد ϕ وR في الاتجاه المعاكس. يجب قياسهما في نفس الاتجاه. القوة في اتجاه تزايد ϕ تساوي R- وهكذا نحصل على

$$ma = -R$$

نعوض عن a وR بالعلاقات (٣٢) و(٣١) ونحصل على

$$ml \frac{d^2\phi}{dt^2} = -mg \sin\phi$$

أي أن

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \sin\phi \qquad (٣٣)$$

هذه هي المعادلة التفاضلية التي تحكم حركة البندول.

بقي أن نعطي شروطاً ابتدائية أو حدودية لهذه المعادلة التفاضلية. انظر الشكل (٥-٢١). لقد أخذنا البندول NB مائلاً على الوضع الرأسي NO بزاوية ϕ عند اللحظة t. متى تكون الكرة عند النقطة O ؟ من الأفضل حساب الزمن من اللحظة التي تكون فيها الكرة في هذا الوضع المتوسط. إذن

$$\phi = 0 \text{ عندما } t = 0 \qquad (I)$$

وهـذا ما يسمى بالشـرط الابتـدائي. لقـد اتفقنـا متى يبدأ اهتمامنا بالبندول ولكن متى ينتهي؟ الجـواب عنـد إتمـام ربـع دورة، عنـدمـا تصـل الكرة إلى A ، حيث إن الزمن اللازم للحركة من O إلى A يساوي ربع الزمن T اللازم لإتمام دورة كاملة من O إلى A إلى O إلى A' إلى O . نسأل أنفسنـا: ما قيمـة ϕ إذا كانت $t = \frac{1}{4}T$ ؟ هذه القيمـة العظمى لـ ϕ تسمى سعة الذبذبة. دعونا نسميها α ، إذن

$$\phi = \alpha \quad \text{عندما} \quad t = \tfrac{1}{4}T$$

ولكن هل يضيف هذا الشـرط أي جديـد؟ إن مجرد تسميـة السعـة لا يضيف أيـة معلومـات جديدة. نذكر هنا قصة وإن كانت مشكوكا في صحتها، الطالب يقول «نعم، إنني أفهم كيف حسبت كتلة المشـتري. الشيء الـذي يحير ني كيف وجدت اسمه». لقد سمينا السعة وبقي الشيء المهم وهـو حسـابها. هذا سؤال فيزيائي وليس لغويا. عندما تصل الكرة إلى A فإنها عند نهاية الذبذبة؛ وتكون ساكنة آنيًّا:

$$l\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad \text{ومنه} \quad \frac{d\phi}{dt} = 0$$

إذن

$$\text{عند اللحظة} \quad t = \tfrac{1}{4}T, \quad \phi = \alpha, \quad \frac{d\phi}{dt} = 0 \qquad (II)$$

حيث إن هذا الشرط يتحقق عندما تصل الكرة إلى نهاية المسار فإننا نسميه شرطاً حدوديًّا.

الآن نكتب الصياغة الرياضية الكاملة للمسألة:

المعطي هو (٣٣) والشروط هي (I) و(II) والمطلوب حساب T.

هناك أمران يجب الإشارة إليهما. أولاً، إن بساطة صياغة المسألة تعطي فكرة خاطئة عن الحل. إن الحل طويل ومعقد. هناك صعوبات رياضية كثيرة. الحل الكامل يتطلب ما يسمى

بدوال القطــع النــاقص وهــذا نوع يختلف عن الــدوال المعـروفـة مثـل الأسيـة، المثلثيـة، اللوغـاريتميـة والجـبر يـة. ماذا يمكن عمله؟ إذا لم نستطـع حل المسألة الأصلية، تحاول حل حالة مبسطة لها. تبسيط المسائل أمر مرغوب فيه بشرط ألا تكون الخسارة في دقة الحل كبيرة. أفضل ما يمكن عمله هو البحث عن تقريب جيد. التقريب يعني مفكوك متوالية قوة في قوى كمية صغيرة.

الآن نصـل إلى الأمـر الثـاني. ما نوعيـة حل المعادلة (٣٣)؟ بما أنها تحوي المشتقة الثانية فإننا نتوقع حلاً يحوي الثابتين l وg أي أن الحل من الصيغة

$$\phi = f(t, l, g). \tag{٣٤}$$

كذلك يمكن أن نبدأ من الطرف الآخر. نشتق (٣٤) بالنسبة لـt ونحصل على

$$\frac{d\phi}{dt} = f'(t, l, g),$$

ثم نشتق مرة أخرى

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = f''(t, l, g).$$

كل من الطريقتين تدلنا على أن الحل من الصورة (٣٤). نعوض الشرط *(II)* ونحصل على

$$\alpha = f(\tfrac{1}{4}T, l, g)$$

أي أن α معطاة بدلالة $1/4\,T$ ، l وg. وإذا حللنا المعادلة للمجهول T بدلالة l ، g وα نجد

$$T = F(l, g, \alpha).$$

ولكن في السابق وجدنا أن

$$T = c\sqrt{\frac{l}{g}}$$

حيث c ثابت. يمكن كتابة هذه النتيجة في الصيغة

$$T = F(l,g)$$

وهذا يعني أن T دالة في l وg فقط ولا تعتمد على α. ولكن T لا يمكن أن تعتمد ولا تعتمد على α. إننا نواجه معضلة.

نفكر مرة أخرى. لقد توصلنا إلى القانون.

$$T = c\sqrt{\frac{l}{g}}$$

عن طريق تحليـل الأبعـاد على افـتراض أن T تعتمد على l وg فقط. صحيح أننا لم نذكر هذا بصـراحـة تامـة إلا أنـه كان موجـودا ضمنيـا. لا نستطيـع أن ننتقـد نتيجتنا لأنها توافقت مع فرضياتنا. السؤال الحقيقي يتعلق بالفرضية: هل T مستقلة حقا عن α أم لا؟ علينا أن نعود إلى الحكم الأخير وهو التجربة.

ما هو حكم التجربة؟ لقد تبين أن T ليست مستقلة عن α إذا كانت α كبيرة. فمثلا إذا كانت سعة البندول ٦٠° فإن زمنه الدوري يكون أقل مما لو كانت سعته ٩٠°. ولكن إذا كانت α صغـيرة (أقـل من ١٠° مثـلا) فلا يوجـد فرق محسـوس في زمن الـدورة. إن قصـر القوس والتسـارع عامـلان يعـادل كل منهـما الآخر: إذا كانت α صغيرة فإنهما يلغيان بعضهما بصورة جيدة ويصبح التغير في T صغيراً، أما إذا كبرت α فالتعادل ليس جيدا ويظهر تغير ملموس في T: ماذا نستخلص من هذا كله؟ مع أن T تعتمد في الحقيقة على α بالإضافة إلى l وg، إلا أنـه يمكن إهمال α إذا كانت صغـيرة. إذا كانت α صغـيرة وهي أكبر قيمة لـ ϕ فإن ϕ صغيرة بالضرورة. وهذا يوحي بنشر متسلسلة في قوى ϕ. حيث إن $\sin\phi$ تظهر في المعادلة (٣٣) نكتب المفكوك

$$\sin\phi = \frac{\phi}{1!} - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \dots .$$

هذا المفكوك يتحقق بالطبع لجميع قيم ϕ إذا قيست بالراديان. إذا كانت ϕ صغيرة فإنه يمكن إهمال الحد الثالث وما يليه من قوى ϕ بدون خسارة كبيرة في الدقة والمثال التالي يوضح هذا. خذ $\varphi = 10°$ بما أن $180° = \pi$ rad ، إذن

$$10° = \frac{\pi}{18} = 0.1745\ldots \text{ radians,}$$

إذن

$$\sin 10° = 0.1745\ldots - \frac{(0.1745\ldots)^3}{6} + \frac{(0.1745\ldots)^5}{120} - \ldots$$
$$= 0.1745\ldots - 0.00088\ldots + 0.0000013\ldots - \ldots.$$

نستنتج أن $\sin\phi \approx \phi$ إذا كانت ϕ صغيرة.

دعونا الآن نثبت نفس النتيجة بأسلوب هندسي. سوف نأخذ قوسا ووترا محدودين بزاوية صغيرة ϕ ونظيرتها في دائرة الوحدة. انظر الشكل (٥-٢٢). واضح أن

$$\sin\phi = \frac{B'O}{1} = \frac{OB}{1}$$

إذن

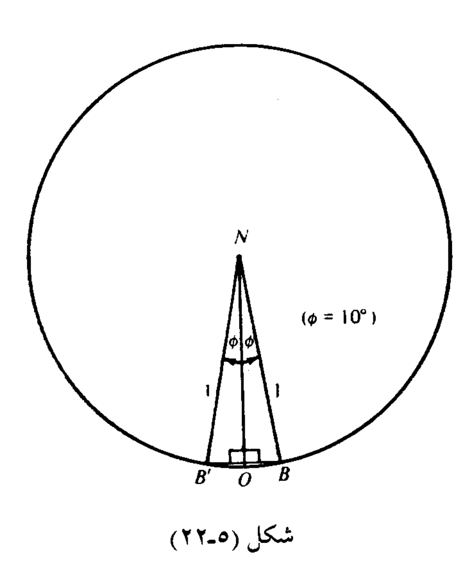
$$2\sin\phi = B'O + OB = B'B.$$

بما أن ϕ بالراديان فإن

الزاوية × نصف القطر = القوس

أي

$$2\phi \times 1 = \widehat{B'B}.$$



شكل (٥-٢٢)

لكن إذا كانت ϕ صغيرة فإن

$$B'B \approx \overset{\frown}{B'B},$$

إذن

$$2 \sin \phi \approx 2\phi,$$

أو

$$\sin \phi \approx \phi.$$

كلما صغرت ϕ اقترب القوس من الوتر وكذلك اقترب $\sin \phi$ من ϕ .

نستنتج أنه إذا كانت ϕ صغيرة فإن المعادلة

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\phi \qquad (٣٥)$$

تعطي تقريباً جيداً للمعادلة (٣٣) . ومن هذا نتوقع أن يكون حل (٣٥) قريباً من حل (٣٣) . إن استبدال (٣٣) بالمعادلة (٣٥) ليس بالأمر البسيط . لابد أن يسبب هذا بعض الخطأ ولكن

ما مقدار هذا الخطأ؟ أفضل طريقة للتحقق هي مقارنة حل المعادلة المبسطة بالتجربة. ولكن قبل أن نتمكن من عمل المقارنة علينا أن نحل المعادلة.

كيف نحل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية؟ نحاول أن نخفضها إلى الدرجة الأولى. ما هي التعويضات المطلوب عملها؟ إن معدل حركة البندول يساوي السرعة الزاوية، أي أن

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \tag{٣٦}$$

ومن هذا

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\phi}{dt}\right) = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

وتصبح المعادلة (٣٥)

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\cdot\phi. \tag{٣٧}$$

هل هذه معادلة من الدرجة الأولى؟ لا، لدينا هنا ثلاثة متغيرات ω، t و ϕ. علينا أن نتخلص من واحد منها. خذ

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{(\ \ )}{dt}\cdot\frac{d\omega}{(\ \ )}.$$

بأي من $d\omega$، dt، أو $d\phi$ نملأ الأقواس؟ لنجربها.

$d\phi$ يعطينا

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\cdot\frac{d\omega}{d\phi}$$

باستعمال (٣٦) نجد

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega\cdot\frac{d\omega}{d\phi}$$

وتصبح (٣٧)

$$\omega \cdot \frac{d\omega}{d\phi} = -\frac{g}{l} \cdot \phi. \qquad (٣٨)$$

ونتخلص من المتغير t. لدينا الآن معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى. الآن نفصل المتغيرات. من (٣٨) نحصل على

$$\int \omega \cdot d\omega = -\frac{g}{l} \int \phi \cdot d\phi.$$

نكامل ونحصل على

$$\frac{1}{2}\omega^2 = -\frac{g}{l} \cdot \frac{1}{2}\phi^2 + c.$$

نطبق الشرط (II) ونصل إلى

$$0 = -\frac{g}{l} \cdot \frac{1}{2}\alpha^2 + c.$$

$$c = \frac{1}{2}\frac{g}{l}\alpha^2$$

أي

$$\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{g}{l}(\alpha^2 - \phi^2).$$

من المعادلة (٣٦) نجد

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}(\alpha^2 - \phi^2)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sqrt{\alpha^2 - \phi^2}. \qquad (٣٩)$$

وهذه معادلة أخرى من الدرجة الأولى .

نفصل المتغيرات كالعادة ونكامل

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{\alpha^2 - \phi^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \int dt. \tag{٤٠}$$

نكتب الطرف الأيسر في الصيغة

$$\alpha^2 - \phi^2 = \alpha^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\phi}{\alpha} \right)^2 \right\},$$

إذن

$$\sqrt{\alpha^2 - \phi^2} = \alpha \sqrt{1 - (\phi/\alpha)^2}$$

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{\alpha^2 - \phi^2}} = \int \frac{d\phi}{\alpha \sqrt{1 - (\phi/\alpha)^2}} = \int \frac{(1/\alpha) d\phi}{\sqrt{1 - (\phi/\alpha)^2}}.$$

لكن

$$\frac{1}{\alpha} d\phi = d\left(\frac{\phi}{\alpha} \right)$$

إذن

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{\alpha^2 - \phi^2}} = \int \frac{d(\phi/\alpha)}{\sqrt{1 - (\phi/\alpha)^2}}$$

وهذا من الشكل

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{حيث} \quad x = \frac{\phi}{\alpha}$$

وطبعاً أنت تعرف أن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc}\sin(x) + c.$$

المعادلة (٤٠) تصبح

$$\text{arc}\sin\left(\frac{\phi}{\alpha}\right) = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + c'$$

حيث دمجنا ثابت الطرف الأيسر مع ثابت الطرف الأيمن.

مع أنه ليس ضروريًّا لتحديد T ، يستحسن إيجاد قانون للمتغير ϕ . كيف نتخلص من *arcsin* ؟ العلاقة بين *arcsin* و *sin* مثل العلاقة بين الأب والابن. كلاهما علاقة عكسية. إذا كان

علي = أب زيد

فإن زيد = إبن علي

بالمثل نقول، إذا

$$arc\ sin\ of\ \frac{\phi}{\alpha} = A$$

فإن

$$\frac{\phi}{\alpha} = sine\ of\ A$$

إذن معادلتنا الأخيرة تعطينا

$$\frac{\phi}{\alpha} = \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + c'\right\},$$

أي

$$\phi = \alpha \cdot \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + c'\right\}. \quad (٤١)$$

بقي أن نحدد c' . المهم هنا ألا نستعمل الشرط نفسه أكثر من مرة. لقد استعملنا شرط الحدود والآن نستعمل الشرط الابتدائي (I) $\phi = 0$ عندما $t=0$.

نعوض في (٤١)

$$0 = \alpha \cdot \sin\{0 + c'\}$$

هذه المعادلة لها حلول كثيرة ونختار أبسطها

$$c' = 0$$

إذن

$$\phi = \alpha \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right\}. \quad (٤٢)$$

وهذا هو قانون ϕ .

الآن يمكن حساب T . راجع الشكل (٥-٢١). بما أن التوقيت يبدأ من بداية الحركة من الوضع المتوسط فإن $T/4$ تمثل أول مرة تكون الكرة عند A أي أن $T/4$ أصغر قيمة لـ t تكون فيها $\phi = \alpha$. إذن $\sqrt{g/l}\,T/4$ أصغر قيمة لـ t $\sqrt{g/l}$ تكون عندها $\phi = \alpha$. ما هذه القيم؟

نجعل $\phi = \alpha$ في (٤٢) ونحصل على

$$\alpha = \alpha \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right\},$$

إذن

$$1 = \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{l}}\ t\right\},$$

إذن قيم $\sqrt{g/l}\ t$ التي تجعل $\alpha = \phi$ هي

$$\frac{\pi}{2},\quad 2\pi + \frac{\pi}{2},\quad 4\pi + \frac{\pi}{2}, \ldots .$$

أقل هذه القيم $\pi/2$. إذن

$$\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{1}{4} T = \frac{\pi}{2}, \quad \text{أي} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (٤٣)$$

وهذا هو حل مسألتنا المبسطة.

الآن نعود للسؤال الأساسي: هل استبدال (٣٣) بالمعادلة (٣٥) يؤدي إلى خطأ كبير؟ الجواب لا. إذا كانت $\alpha < 10°$ فلا يوجد فرق محسوس بين (٤٣) والتجربة. وهذا يبرر التبسيط.

تذكر أن حل المعادلة التفاضلية (٣٥)

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \phi,$$

هو الحل (٤٢)

$$\phi = \alpha \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{l}}\ t\right\}.$$

وهذا مهم لعدة أسباب . إن اهتزاز الشوكات الرنانة والأجسام المرنة وحتى بعض الظواهر الكهربائية يخضع للمعادلة (٣٥) . ولهذا تعرف المعادلة (٣٥) بمعادلة الذبذبة الصغيرة . سوف تدرس هذه المعادلة في الفيزياء بالتأكيد .

الجزء الثالث : التشبيه المادي

المرحلة الأولى من نجاحنا في حل المسائل الفيزيائية هي صياغة المسألة في معادلة تفاضلية بشرط ابتدائي ، المرحلة الثانية هي حل المعادلة بشرطها الابتدائي . لقد أخفقنا مرة واحدة حيث لم نتمكن من حساب الزمن الدوري للبندول بذبذبة كبيرة . إذا تأملنا قليلا سنلاحظ أن العامل الذي يحدد مدى نجاحنا مرتبط بالمرحلة الثانية وليس الأولى . إن صعوبة حل المعادلات التفاضلية بشكل عام يعتبر حافزا لأن نستخدمها بصورة اقتصادية . لحسن الحظ ، لدينا سلعة القليل منها يعطي الكثير . لقد ذكرت سابقا ، أن معادلة الذبذبة الصغيرة تحكم الظواهر الاهتزازية الأخرى . في دراستنا للبندول المهتز ، كنا ندرس أيضا اهتزاز الشوكة الرنانة . هل للمعادلات التفاضلية الأخرى استعمالات متعددة أيضا .

سنركز على تطبيقات نتيجة سابقة في مجال الكهرباء . في البند (٥-١-٤) ، (السقوط مع الاحتكاك) أثبتنا أن المعادلة التفاضلية (١٨)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - k\frac{dx}{dt}$$

بالشرط الابتدائي

$$t = 0 \text{ عندما } x = 0,\ \frac{dx}{dt} = 0$$

تعطينا بعد حلها، النتيجة (٢٠) وهي

$$v = \frac{g}{k} - \frac{g}{k} e^{-kt}.$$

يبدو لأول وهلة أنه لا فائدة من هذه النتيجة للمهندس الكهربائي على الإطْلاق. في وقتنا الحاضر، حيث أجهزة التلستار شائعة الاستعمال، والصواريخ العابرة للقارات جاهزة للإطلاق. والحاسبات الالكترونية منتشرة مثل انتشار آلات الطباعة تقريباً، لن يستغرب القارىء عند إخباره أن دراسة الكهرباء أصبحت دراسة علمية دقيقة. ماذا يمكن أن تكون العلاقة بين قانون تقريبي لسقوط جسم من منطاد، وعلم دقيق مثل الكهرباء؟ الحياة مليئة بالمفاجآت، قانوننا التقريبي لسقوط جسم في وسط مقاوم مشابه تماما لقانون التيار الكهربائي في سلك مقاوم.

في الحقيقة، يوجد تناظر دقيق عندما نكتب (١٨) في صورتها الصريحة. من أجل اختصار الرموز، حصلنا على (١٨) بالقسمة على m ومن ثم عوضنا k بدلا من k/m. لكي نسترجع m في المعادلة بصورة صريحة، سوف نعكس العمليات ونحصل على

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - K \frac{dx}{dt}.$$

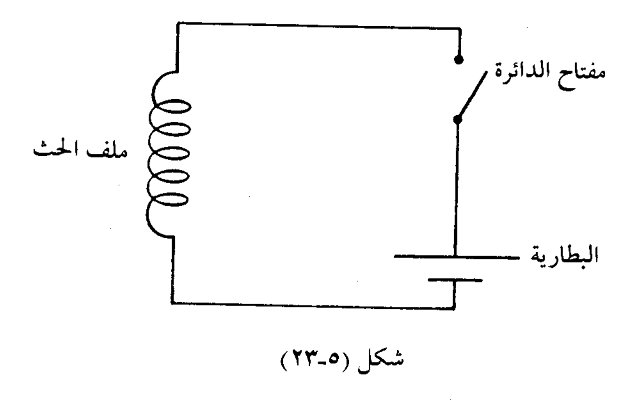
وبما أن $v = \frac{dx}{dt}$ ومن ثم $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ إذن الصورة الصريحة المطلوبة هي

$$m \frac{dv}{dt} = mg - Kv. \qquad (١٨`)$$

هذه هي الصيغة المناسبة لإظهار وجه الشبه بين السقوط والتيار الكهربائي.

عناصر المعادلة (٢٠) واضحة الآن، وهي الكتلة m، معدل تغير السرعة dv/dt، قوة الجاذبية mg والسرعة v. ما هي النظائر الكهربائية لهذه العناصر؟ انظر الشكل (٥-٢٣). إذا

ضغطنا المفتاح فإن التيار الكهربائي يسير في السلك وهذا شبيه بسقوط الحجر عندما نطلقه. قوة الجـاذبيـة mg هي السبب في سقوط الحجر، وقوة الضغط الكهربائي E في البطارية تسبب سريـان التيـار. الجسم الساقط يقاوم الاحتكاك الناتج عن الهواء بينما التيار الكهربائي يتغلب على مقاومة السلك. مقاومة الهواء تتناسب مع سرعة الجسم v، بينما مقاومة السلك تتناسب مع شدة التيار i.



شكل (٥-٢٣)

على هذا الأسـاس، نجـد أن معـدل تغير السرعة dv/dt يناظر معدل تغير شدة التيار di/dt . الآن ننظم هذه النظائر في جدول، والرمز "$\sim$" يعني نظير لـ

كهربائي	يناظر	مـــــادي
قوة الضغط الكهربائي	$E \sim mg$	قوة الجاذبية
شدة التيار	$i \sim v$	سرعة الجسم الساقط
معدل تغير التيار	$\frac{di}{dt} \sim \frac{dv}{dt}$	معدل تغير السرعة
	$? \sim m$	كتلة الجسم

لدينا مكان فارغ في العمود الأيمن. ما هو نظير الكتلة؟ الحث الكهرطيسي L يضاد تغير شدة التيار، ولذا فالتيار لا يتغير بصورة آنية تماماً. أليس القصور الذاتي أو الكتلة m للجسم تجعله يحتفظ بحركته نفسها إلى الأبد؟ أليست L قصورا ذاتيًّا كهرطيسيًّا؟

الآن نكمل الجدول.

	يناظر	
الحث الذاتي	$L \sim m$	الكتلة

بعد حصولنا على هذه النظائر المعقولة إلى حد ما، نعوض في المعادلة (١٨) ونحصل على

$$L\frac{di}{dt} = E - Ki.$$

بقيت ملاحظة صغيرة. معامل الاحتكاك K الآن مرتبط بشدة التيار i بدلا من السرعة v وعليه فإن K تصبح معامل المقاومة الكهربائية. إذن يفضل أن نرمز له بالرمز r كما هي العادة في كتب الكهرباء. بهذا الرمز الجديد تصبح المعادلة (١٨)

$$L\frac{di}{dt} = E - ri, \qquad (١٨'')$$

لكي نكمل الجدول نكتب أخيراً

	يناظر	
المقاومة الكهربائية	$r \sim K$	الاحتكاك

بعد أن خمنا هذا التناظر المعقول، دعونا نستعمله. الخطوة الأولى هي إعادة كتابة المعادلات (١٨) - (٢٠) بدلالة v وK. كما ذكرنا سابقا (١٨) تصبح (١٨`). الشرط الابتدائي يصبح

$x=0$ ، $v=0$ عندما $t=0$.

نعوض عن k بـ k/m في (٢٠) ونحصل على

$$v = \frac{mg}{K}\left(1 - e^{-(K/m)t}\right). \qquad (٢٠`)$$

نستطيع أن نختصر نتائج دراستنا للسقوط الحر مع الاحتكاك على النحو التالي: إذا كانت الظاهرة تخضع للمعادلة

$$m\frac{dv}{dt} = mg - Kv \qquad (١٨`)$$

بالشرط الابتدائي

$x=0$ ، $v=0$ عندما $t=0$

فإنها تخضع للمعادلة

$$v = \frac{mg}{K}\left(1 - e^{-(K/m)t}\right). \qquad (٢٠`)$$

إذا زاوجنا النظائر على الشكل التالي:

m	dv/dt	mg	K	v
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
L	di/dt	E	r	i

فإننا نستطيع أن نكتب الآتي مباشرة

إذا حققت أي ظاهرة المعادلة

$$L \frac{di}{dt} = E - ri \qquad (\text{١٨}'')$$

بالشرط الابتدائي

$i = 0$ عندما $t = 0$

فإنها تحقق المعادلة

$$i = \frac{E}{r}\left(1 - e^{-(r/L)t}\right). \qquad (\text{٢٠}'')$$

هنـاك ملاحظـة بسيطـة : $x = 0$ ليس لها نظير ولذا فإننا نحذفها. الشيء الذي يمكن أن يزعجنا هو نقص المعلومات ذات الصلة بالموضوع وليس كثرة المعلومات العديمة الصلة.

بقي أن نسأل السؤال الهام : هل التشبيه السابق صحيح؟ الجواب نعم. ولكن على أي أساس نقبـل هذا الجـواب؟ كالعادة، التجربة هي الحكم الأخير. المعادلة (٢٠ ") تتفق مع التجربة ولذا فإننا نقبل (١٨ ").

في السابق (وبالرموز الضمنية) أثبتنا أنه عندما تكون $(K/m)t$ كبيرة فإن (٢٠ ") تعطينا

$$v \approx \frac{mg}{K}$$

أي أن الجسم السـاقـط يكتسب سرعـة نهائيـة. علينـا أن نتـوقـع نتيجـة مماثلة للتيـار الكهربائي. إذا كانت $(r/L)t$ كبيرة فإن (٢٠ ") تعطينا

$$i \approx \frac{E}{r},$$

أي أن التيـار يكتسب سرعـة نهائيـة. هذا هو قانـون أوم (Ohm) المعـروف لدى تلاميـذ المدارس. هذا دليل جديد يسند المعادلة (١٨ ") وتشبيهنا أيضاً.

طبعـا التشبيـه مضلل في الغـالب وأهميتـه هي أنـه يسـاعـد في كثير من الأحيان. إننا لا نستطيـع إعطـاء المـزيـد حول دور التشبيـه في إعطاء تفسيرات جديدة لمعادلات قديمة وذلك بسبب ضيق الوقت وليس قلة الأمثلة. المعادلات التفاضلية وسائل فعالة وتتكلم بعدة ألسن.

الجزء الرابع: ما هي المعادلة التفاضلية؟

(٥ ـ ٤ ـ ١) مثال

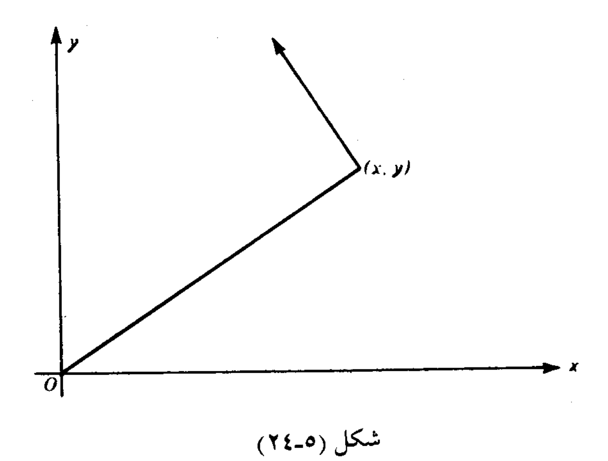
علينا أن نحل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \qquad (٤٤)$$

سوف أطلب من القـارىء أن يضـع قلمـه ويتوقف عن إجراء الحسابات ويفكر. ما هي الحقيقة الهندسية التي تعبر عنها المعادلة (٤٤).

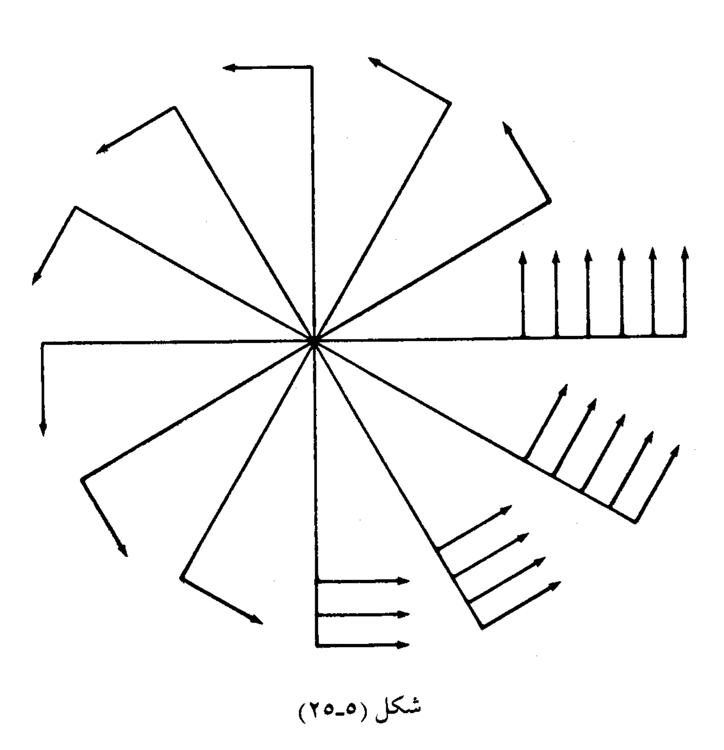
علينـا أن نجـد منحنيـا. المعادلة (٤٤) تقول إن ميل المنحنى المطلوب عند النقطة (x,y) يساوي $-x/y$. الكمية y/x تمثل ميل المستقيم الواصل بين نقطة الأصل والنقطة (x,y). إذن بقليل من الهندسة التحليلية نتعرف على منحنى المعادلة (٤٤): المماس لهذا المنحنى عند أي نقطـة يكـون عمـوديـا على المستقيم الـواصـل بين تلك النقطـة ونقطة الأصل، انظر الشكل (٥ـ٢٤). هل تعرف هذا المنحنى؟

لكي نظهر المعنى الكامل للمعادلة التفاضلية (٤٤)، علينا أن نتصور اتجاه المماس الذي تحدده (٤٤) عند كل نقطة (x,y)؛ هذا الاتجاه موضح في الشكل (٥ـ٢٥) عند عدة نقاط ـ لا نستطيع رسمه عند جميع النقاط. هل تعرف المنحنيات بالمماسات المعطاة؟



شكل (٥-٢٤)

(المماس عمودي على المستقيم الواصل بين نقطة التماس ونقطة الأصل)



شكل (٥-٢٥)

(القاعدة تعطي اتجاه المماس عند كل نقطة باستثناء نقطة واحدة)

الشكـل (٥ـ٢٥) يلمـح بمعنى المعادلة (٤٤) فقط. نستطيع الحصول على تمثيل كامل بطرق ميكانيكية. لنفرض أن صحناً يدور حول المركز؛ كل نقطة منه، لها اتجاه حركة معطى بالمعادلة (٤٤). هل لديك شك الآن في المنحنى الذي يحقق المعادلة (٤٤)؟.

إذا لم تعـرف المنحنى بعـد، يمكن حل هذه المعـادلـة من الـدرجـة الأولى بالطريقة التي تعلمناها في هذا الفصل من الكتاب. نفصل المتغيرات:

$$ydy = -xdx$$

ونكامل

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C,$$

إذا كتبنا ثابت التكامل في الصورة $C = r^2/2$ فإننا نحصل على

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

حيث r ثابت اختياري موجب. المعادلة التفاضلية (٤٤) تحكم جميع الدوائر المتمركزة في نقطة الأصل كما عرفنا منذ البداية.

تمعن في الأشكـال (٥ـ٢٤) و(٥ـ٢٥). هل تقـول الأشكـال نفس ما تقـولـه المعـادلـة بالرموز؟ هل الشكل (٥ـ٢٥) صحيح تماما؟

البند التالي (٥ـ٤ـ٢) يمهد لتعميم المثال السابق.

(٥ ـ ٤ ـ ٢) فضاءات المتجهات (Vector Fields)

تيـار النهـر الثـابت الـذي ألهم الكثـير من الشعـراء والفيلسـوف اليـونـاني هيراكليتس *(Heraclitus)* يمكن أن يوحي ببعض الأفكار الرياضية والفيزيائية الهامة.

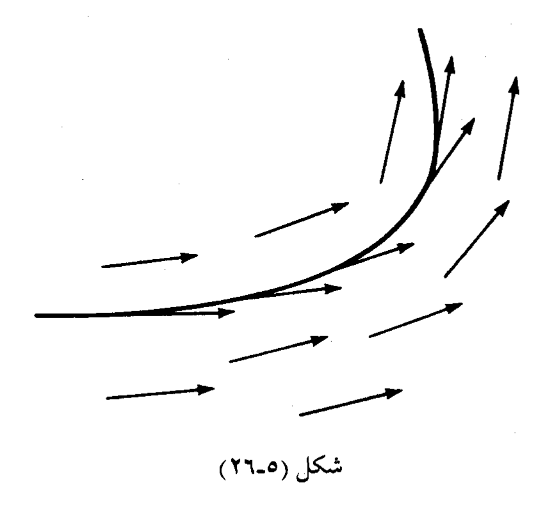
نقول إن التيار ثابت *(Steady)* إذا لم يتغير مع الوقت. النهر الذي ينساب بثبات لا يتغير بالنسبة للمشاهد مع أنه في حركة مستمرة. لن نستطيع أن نتبين أي تغير فيه حتى بأقوى أجهزة المشاهدة، إلا بعد تعكير مسار التيار.

ما هي التفاصيل الأساسية لحركة المائع الثابتة؟ للتيار سرعة معينة عند كل نقطة، سرعة جزء صغير من المائع عندما يمر من النقطة. سرعة التيار لا تتغير مع الوقت لأن الحركة ثابتة ولكنها قد تتغير من نقطة لأخرى. سرعة التيار عند أي نقطة لها قيمة واتجاه؛ إنها متجه ويمكن تمثيلها بقطعة مستقيمة موجهة، [راجع الجزء (٢ـ٢)]. المعرفة الكاملة لحركة التيار تتطلب معرفة هذا المتجه، سرعة التيار، عند كل نقطة.

لقد توصلنا إلى مفهوم رياضي ـ فيزيائي هو فضاء المتجهات: وهذا حيز من الفضاء نعين عند كل نقطة منه متجهاً معيناً له قيمة واتجاه. المتجه قد يكون قوة تؤثر على النقطة، أو سرعة جسيم مادي يمر عند النقطة، ويمكن تمثيل هذا المتجه هندسيا بقطعة مستقيمة موجهة منطلقة من هذه النقطة.

لكي نعطي هذا المفهوم حقه، علينا أن نوضحه بأمثلة عديدة من مختلف فروع الفيزياء. هذا سهل وذلك لوجود الكثير من هذه الأمثلة. ولكن ليس لدينا متسع لهذا. ولكن يمكن التأمل أكثر في مثالنا حول التيار النهري الثابت.

مسار الجزء الصغير في التيار الثابت يدعى خط الانسياب *(Streamline)*. سرعة الجسيم المار بنقطة معينة تساوي المتجه عند تلك النقطة. إذن، خط الانسياب أو مسار الجسيم مماس للمتجه عند النقطة. خط الانسياب هو منحنى مماس عند كل نقطة من نقاط لمتجه المجال الخارج من تلك النقطة. انظر الشكل (٥ـ٢٦). انظر الشكل (٥ـ٢٥) أيضا؟ إذا فسرناه على أنه مجال متجهات، فإن خطوط الانسياب هو دوائر متمركزة.



شكل (٥-٢٦)

(خط انسياب في مجال متجهات)

إذا كان التيـار ثابتـاً ، فإن مجال متجهـات السـرعـة وخطوط الانسياب لا تتغير مع مرور الزمن. إذا نظرنا إلى مجال المتجهات وخطوط انسيابها فإننا لا نلاحظ أي تغير. ومع ذلك لو استطعنا أن نميز بين أجزاء المائع المختلفة لشاهدنا حركة دائبة: أجزاء مختلفة من المائع تمر من نفس النقطة مع مرور الزمن.

لدينا هنا سمتان للتيار الثابت، استمرارية لا تتغير وتغير لا ينقطع. مقارنة هذه الأشياء قد تكون مثيرة. قد توحي لك بأفكار فلسفية إذا كنت ميالا للفلسفة.

لقـد سُمي هيراكليتس بالفيلسـوف الكئيب لأن نظـرتـه للظـروف الانسانية كانت نظرة كئيبة وأقواله غامضة. إليك اثنان من أقواله المبهمة:

«لا يمكن النظر إلى النهر نفسه مرتين، لأن مياه جديدة تنساب باستمرار»

«إننا ننظر ولا ننظر إلى الأنهار نفسها، إننا نكون، ولا نكون»

ما المعنى المقصود بهذه الجمل؟ لن أحاول تفسيرها. ولكنني أعتقد أن قائل هذه الجمل اقترب كثيرا من صياغة مفهوم «تيار المائع الثابت».

(٥ ـ ٤ ـ ٣) فضاءات الاتجاه (Direction fields)

إذا عممنا المثال (٤٤) من (٥-٤-١) فإننا نحصل على المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad (٤٥)$$

حيث $f(x,y)$ دالة معطاة.

المعادلة التفاضلية (٤٥) تعطي الميل dy/dx عند كل نقطة من المستوى (أو عند كل نقطة من جزء معين من المستوى نسميه المجال) الميل يساوي $f(x,y)$ عند النقطة (x,y). علينا أن نحصل على منحني (أي منحني، منحني معين أو كل منحني) الذي له الميل المطلوب عند جميع نقاطه.

نستطيع أن نتصور ماذا تقول المعادلة التفاضلية (٤٥) إذا أخذنا المستوى بمحورية المتعامدين x وy على أنه السطح الأفقي الحر للتيار النهري الثابت.

ما هي المعطيات؟ هناك اتجاه عند كل نقطة من المجال ـ خد اتجاه حركة السائل عند تلك النقطة على أنه الاتجاه المعطى.

ما هو المجهول؟ ما هو المطلوب منا؟ منحني (أي منحني أو منحني معين أو كل منحني) الذي له الاتجاه المعطى عند كل نقطة من نقاطه. كل جسيم من السائل يتحرك على السطح الأفقي الحر للنهر يعطي حلا للمعادلة التفاضلية: في الواقع مماس مسار الجسيم عند كل نقطة يشير إلى الاتجاه المعطى، اتجاه التيار عند تلك النقطة ـ وهذا المسار هو خط الانسياب.

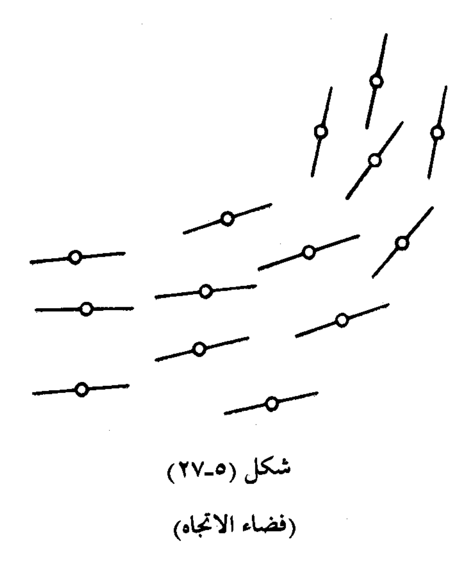
إذن يمكن النظر إلى المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى من الصورة (٤٥) على أنها مسألة حول تيار نهري ثابت: المعطى اتجاه التيار عند جميع النقط والمطلوب حساب خطوط الانسياب.

إذا كان المطلوب «التكامل العام» أي مجموعة الحلول للمعادلة التفاضلية فإن علينا إيجاد جميع خطوط الانسياب.

إذا كان المطلوب أقل من ذلك، «تكامل واحد» أي أن المطلوب هو أي حل للمعادلة التفاضلية فالمطلوب إيجاد أي خط انسيابي.

إذا كان حل المعادلة التفاضلية يخضع لشرط ابتدائي، فعلينا حينئذ الحصول على خط انسياب يبدأ من نقطة معطاة.

سنضيف ملاحظة. لقد أُعجبنا كثيرا بهذا التفسير الجديد، وعليه فقد عبرنا عن تفسيرنا الفيزيائي للمعادلة التفاضلية (٤٥) بسرعة وبصورة غير مكتملة. لا يوجد أي اعتراض على تفسير المنحنيات التي تحقق المعادلة على أنها خطوط انسياب في تيار ثابت. عندئذ المعادلة (٤٥) تعطي الميل $f(x,y)$ لخط الانسياب المار بالنقطة (x,y) عند النقطة نفسها، ولكنها لا تعطينا اتجاه التيار (متجه السرعة) عند النقطة: إنها لا تحدد أيًّا من الاتجاهين الممكنين على الخط بميله المعطى. (يمكننا هنا أن نستشهد مرة أخرى بهيراكليتس: «الطريق إلى أعلى والطريق إلى أسفل هو الطريق نفسه»). إذن عندما نتحدث عن الشرط المفروض من قبل المعادلة التفاضلية على خطوط الانسياب، علينا كذلك أن نحدد «اتجاه المستقيم غير الموجه» وليس فقط «الاتجاه» [الأشكال (٥-٢٤) و(٥-٢٥) كانت مضللة في هذا الخصوص].



شكل (٥-٢٧)

(فضاء الاتجاه)

في الحقيقة، المعادلة التفاضلية لا تحدد فضاء المتجهات، إنها لا تعطينا قيمة المتجه عند النقطة *(x,y)* ولا حتى اتجاهه بصورة كاملة حيث إنها تترك خيارا بين احتمالين. المعادلة التفاضلية (٤٥) في الحقيقة تعين «فضاء الاتجاه» فقط، راجع الشكل (٥-٢٧) وقارنه بالشكل (٥-٢٦).

الطرق الرياضية في العلوم

تأليف

الدكتور جورج پوليا

ترجمة

الدكتور صالح القويز

أستاذ مساعد ـ قسم الرياضيات

جامعة البترون والمعادن ـ الظهران

الناشر: عمادة شؤون المكتبات ـ جامعة الملك سعود

ص.ب ٢٢٤٨٠ ـ الرياض ١١٤٩٥ ـ المملكة العربية السعودية

الطبعة الأولى ١٤٠٦هـ (١٩٨٦م).

"Mathematical Methods in Science"

By: George Pòlya

Published by: The Mathematical Association of America, 1977



مطابع جامعة الملك سعود

«إن كتاب الطبيعة العظيم مفتوح أمام أعيننا والفلسفة الحقيقية مكتوبة فيه.. ولكننا لا نستطيع قراءته إلا إذا تعلمنا اللغة والرموز التي كتب بها.. إنه مكتوب بلغة رياضية والرموز هي المثلثات والدوائر والأشكال الهندسية الأخرى..»

جاليليو

الجمعية الرياضية الأمريكية
المكتبة الرياضية الحديثة



مقدمة المترجم

الحمدلله والصلاة على رسول الله وبعد . . فهذه ترجمة كتاب «الطرق الرياضية في العلوم» من اللغة الانجليزية إلى العربية ، وأملي أن يسد فراغا كبيرا في ميدانه في اللغة العربية ، وأن يثري المكتبة العربية التي لا تزال تفتقر إلى مثل هذه الكتب القيمة .

هذا الكتاب واحد من سلسلة كتب مؤلفة من قبل رياضيين متمرسين لجعل بعض الأفكار الرياضية الهامة شيقة وفي متناول عدد كبير من طلاب المدارس وغيرهم من العامة .

الكثير من المواضيع المعالجة في هذا الكتاب لا تدّرس في مناهج المرحلة الثانوية وتتفاوت في صعوبتها . مع أن القاريء لا يحتاج إلى الكثير من المؤهلات العلمية لقراءة وفهم الكتاب إلا أنه في حاجة إلى أن يبذل بعض الجهد الفكري لفهم ما فيه .

يجب أن يعرف القاريء أن كتب الرياضيات لا تقرأ بسرعة . كذلك لا يتوقع أن يفهم كل ما فيها من القراءة الأولى . بإمكانه أن يترك بعض الأجزاء الصعبة ثم يعود إليها فيما بعد . أما المواضيع المألوفة فبإمكان القاريء أن يغطيها بسرعة .

إن أفضل طريقة لتعلم الرياضيات هي ممارسة حل المسائل الرياضية . إنني أحفز

القاريء أن يتعود على القراءة وفي يده قلم وورقة. بهذه الطريقة فقط تصبح الرياضيات ذات معنى بالنسبة له.

لقد حرصت في ترجمتي لهذا الكتاب على أمانة ودقة الترجمة ولكنني لم أقيد نفسي بالترجمة الحرفية الضيقة. لقد حاولت الابقاء ما أمكن على أسلوب المؤلف وطريقة عرضه للمواضيع المختلفة.

والله أسأل أن يساهم هذا الكتاب في إثارة فضول قرّائه وإنماء مهاراتهم وقدراتهم على التعلم والابتكار.

والله ولي التوفيق،،،

دكتور صالح القويز

الرياض في فبراير ١٩٨٣م

مقدمة المؤلف

«الطرق الرياضية في العلوم» هو عنوان مادة درَّستها عدة مرات في جامعة ستانفورد لمدرسي الرياضيات والعلوم. يحتوي هذا الكتاب على محتويات تلك المادة التي لم تظهر في صورة مطبوعة من قبل. راجع الجزء الأول من كتابي *Mathematics and Plausible Reasoning* وخصوصا الفصول (٣، ٨، ٩).

يعود الفضل في عرض المادة إلى البر وفيسور ليون باودن من جامعة فيكتوريا والذي راجع تسجيلا لهذه المادة وأضاف العديد من التفاصيل والتحسينات. ومع ذلك فقد حافظنا على بعض صفات العرض الشفوي للمادة مثل التوسع وبعض الارتجال.

من أهم أهداف هذه المادة الإشارة إلى التطور التاريخي لبعض المفاهيم العلمية الأساسية كمصدر لتحسين التدريس في الصف. لقد حرفنا العديد من التفاصيل التاريخية بقصد، ذلك لكي نجعلها مناسبة لطلاب المرحلة الثانوية ولكن قد يوجد بعض التحريف غير المقصود. التناسق التام بين المناسب تربويا والصحيح تاريخيا هو الشيء المطلوب ولكن هذا متعذر بسبب ضيق الوقت والامكانات المتوفرة لدي. كذلك يوجد بعض التفاصيل غير التاريخية المناسبة من وجهة النظر التربوية.

في الختام آمل أن يستفيد القاريء من هذا الكتاب، كما أكرر شكري للبر وفيسور باودن.

جورج بوليا

جامعة ستانفورد، يولية ١٩٦٣م

المحتويات

صفحة

مقدمة

في هذه المحاضرات سوف نعالج :

١) مسائل فيزيائية بسيطة يمكن مناقشتها على مستوى المرحلة الثانوية .

٢) علاقة الرياضيات بالعلوم وعلاقة العلوم بالرياضيات . هذه العلاقة طريق باتجاهين .
في العادة نطبق الرياضيات على العلوم ولكن يوجد تطبيقات في الاتجاه المعاكس .
السائق الجيد يأخذ في الاعتبار حركة المرور في الاتجاه المعاكس .

٣) مبادىء حساب التفاضل والتكامل لأنه من غير الممكن فهم كيفية تطبيق الرياضيات في المجالات العلمية بدون هذا العلم .

كما يدل العنوان ـ هذه المحاضرات تتعلق بالطرق ـ في البداية ، يجب أن نعلم أنه لا يوجد طريقة واحدة للتعليم وأن عدد الطرق الجيدة يساوي عدد المدرسين الجيدين . لكي يتمكن المعلم من التدريس بصورة جيدة عليه أن ينمي إحساسه بمادته ، لا يستطيع المعلم أن يشعر تلاميذه بحيوية المادة إذا لم يشعر بها هو نفسه . لا يستطيع أن يشاطرهم حماسه إذا لم يكن لديه حماس في الأصل . إن الأسلوب الذي تعرض به فكرة معينة مهم كأهمية الفكرة نفسها .

سوف اتبع الطريقة التطورية (*Genetic Method*) . الفكرة الأساسية وراء هذه الطريقة هي أن الخطوات التي اكتسب بها الجنس البشري المعرفة تمثل خطوات جيدة لتعلمها من قبل

الأفــراد. لقــد اكتشفت العلوم المختلفـة في ترتيب معـين محدد باهتــامـات البشـر وصعـوبـة المفاهيم. لقد كانت الرياضيات وعلم الفلك من أولى العلوم التي تستحق هذه التسمية ومن ثم جاء علم الميكـانيكـا وعلم البصـريات.. الخ. لقد تميزت كل حقبة زمنية من تطور الفكر البشري بنظرة معينة للعالم الخارجي. لقد تطورت الأفكار والمفاهيم مما كان معروفا. الخطوات التالية والتعثرات كانت تعتمد على مدى قدرة الجنس البشري على المشي. الجنس البشري هنا مثل الطفل الصغير. ولكن هذا لا يعني انه يتحتم علينا تكرار جميع الأخطاء السابقة عند تدريس العلوم. لا ما نقـولـه هنـا هو أن الخطـوات الأسـاسيـة في تطـور المفاهيم العلمية تمثل خطوات فعالة لتعلمها.